

VERİ ZARFLAMA ANALİZİ
MATEMATİKSEL PROGRAMLAMA TABANLI
GÖRELİ ETKİNLİK ÖLÇÜM YAKLAŞIMI

Armağan Tarım
armagan.tarim@hacettepe.edu.tr

10 Mart 2001

Sunuş

Tüm ülkeler kamu ve özel sektörlerini iyileştirmeye, performanslarını artırmaya, kalite düzeylerini yükseltmeye çalışmaktadır.

Sayıştay da, performans denetimi yoluyla, kamu hizmetlerinde sürdürülebilir gelişmeler sağlamayı, hizmetlerin kalitesini artırmayı, hesap verme sorumluluğunu geliştirmeyi, kamu yönetimlerinin performans ölçüm sistemleri oluşturmasını ve performanslarını artırmasını amaçlamaktadır. Sayıştay'ın parlamento ve denetlenen kurumlara bağımsız, güvenilir bilgi, öneri sağlaması ve gelişmeleri cesaretlendirmesi bu çalışmaların titizlikle ve mesleki yeterlilikle yürütülmesine bağlıdır. Aynı zorluklar performans ölçüm sistemi oluşturmak veya toplam kalite yönetimi uygulamak isteyen kamu ve özel sektör yönetimleri için de söz konusudur. Problemleri belirlemede, süreçleri iyileştirmede ve sonuçları ölçmede doğru analiz araç ve teknikleri kullanılmalıdır. Uygun araçların kullanılması ve doğru metotların izlenmesi yönetimlerin yeniden yapılanmalarını hızlandıracak önemli faktörlerdir.

Bu nedenlerle, bir etkinlik ölçüm tekniği olan Veri Zarflama Analizi'ni ele alan bu kitabın, kamu ve özel sektörde konuyla ilgilenenlerin ihtiyaç duydukları teorik tabanın oluşturulmasında faydalı olacağına ve bilimsel metodolojiye dayanan yaklaşımların kullanımını özendirceğine inanıyorum. Bu düşüncelerle Dr. Armağan Tarım'a teşekkür ediyorum.

Prof. Dr. M. Kâmil Mutluer
Sayıştay Başkanı

Önsöz

Modern yönetim anlayışının yapı taşları olan etkinlik ve verimlilik kavramlarını inceleyen birçok çalışma Türkçe yazında yer almıştır. İlgili yazın incelendiğinde görülen en temel eksik, kökleri üretim ekonomisine giden teorik boyutun yeteri kadar işlenmemiş olduğudur. Teorik temelleri zayıf olan bir etkinlik-verimlilik ölçüm metodolojisinin objektiflik kriterini sağlamayacağı ve bu tür çabaları olumsuz yönde etkileyeceği açıktır.

Bu çalışmanın ilk amacı, etkinlik ve verimlilik analizi çerçevesinde referans verilmesi gerekli olan temel kavramları tanımlamaktır. Tanımlamalar yapılırken, belirsizlikten arınmak için, matematiksel sunum tercih edilmiştir.

Etkinlik, verimlilik ve ilgili kavramların tüm boyutlarıyla kavranmış olması, bağlantılı analizlerin gerçekleştirilmesi için gerekli olsa da yeterli değildir. Kavramların aksiyomatik bir yapı içinde ilişkilendirildiği yaklaşımların oluşturulması gerekir. Ancak bu yaklaşımlar yardımıyla, esas olarak bir ölçüm problemi olan, etkinlik ve verimlilik analizinde yol alınabilir. Huxley'in dediği gibi, hayatın amacı bilgi değil eylemdir. Bu bağlamda çalışmanın ikinci amacı, yabancı akademik çevreler ve uygulamacılar tarafından yoğun ilgi gören ve teorik yapısının bütünlüğü açısından etkinlik-verimlilik ölçüm çalışmalarında önemli bir adım olarak değerlendirilen Veri Zarflama Analizi'ni incelemektir.

Eğer bu çalışma, üretim ekonomisi ve yöneylem araştırması alanlarında geliştirilen modellerin, tekniklerin ve yaklaşımların etkinlik ve verimlilik analizlerinde kullanımını özendirirse amacına ulaşmış olacaktır.

Etkinlik ve verimlilik konusunun yönetim bilimi ışığında incelenmesi için yapılan girişimleri destekleyen ve bu doğrultuda Hacettepe Üniversitesi bünyesinde kurulma sürecinde olan Verimlilik Enstitüsü'nün fikri öncülüğünü yaparak önemli bir yapılanmayı sağlayan Sayıştay Başkanı

Prof. Dr. Kâmil Mutluer'e teşekkür ederim.

Genç araştırmacıları bir araya getiren ve etkinlik analizi konusunda yaptığımız tartışmalarla birçok özgün çalışmanın tohumunu atan, açtığı yoldan gelen genç arkadaşlarına heyecan aşılayan, her zaman sıcak ilgisini ve yoğun desteğini gördüğüm Prof. Dr. Selçuk Cingi'nin katkıları önemlidir. Hocama teşekkür ederim.

Türkiye'de Veri Zarflama Analizi konusunda ilk akademik çalışmalardan birini gerçekleştiren ve bu kitabın hazırlanması sürecinde her türlü desteği veren eşim Şule Tarım'a ayrıca teşekkürler...

A.T.

Şule'ye

İçindekiler

1 Giriş	1
2 Temel Kavramlar	5
2.1 Üretim Sınırı	5
2.2 Verimlilik	11
2.3 Teknik Etkinlik	14
2.4 Ölçek Etkinliği	16
2.5 Farrell Etkinlik Ölçümü	18
2.6 Eş-Ürün Eğrileri ve Etkin Sınır	22
2.7 Tahsis Etkinliği	27
2.8 Örnekler	33
2.8.1 Örnek I: Toplam Etkinlik	34
2.8.2 Örnek II: Tahsis Etkinliği	39
2.8.3 Örnek III: Tahsis Etkinliği, Tek-Girdi İki-Çıktı	41
3 Veri Zarflama Analizi	45
3.1 Giriş	45
3.2 Kesirli Programlama Modeli	48
3.3 Doğrusal Programlama Modeli	53
3.4 Kesirli-Doğrusal Modeller	55
3.5 CCR Modelleri	61

3.5.1	Girdiye Yönelik CCR Modelleri	61
3.5.2	Çıktıya Yönelik CCR Modelleri	62
3.5.3	Referans Kümesi	64
3.5.4	Örnek	69
3.6	Arşimedgil Olmayan Modeller	78
4	Teknik-Ölçek Etkinliği	85
4.1	Shephard Uzaklık Fonksiyonu	85
4.2	Teknik Etkinlik	88
4.3	Ölçeğe Göre Getiri ve MPSS	96
4.4	Örnekler	103
4.5	Ölçeğe Göre Değişken Getiri	108
4.6	Alternatif Çözüm	114
5	DEA ve Tahsis Etkinliği	131
6	Dışsal Değişkenler	135
6.1	Sabit Girdi	139
6.2	Sabit Çıktı	144
6.3	Örnek: Sabit Girdi/Çıktı	145
6.4	Kategorik Değişkenler	147
7	Malmquist TFP Endeksi	151
7.1	Giriş	151
7.2	Uzaklık Fonksiyonu	152
8	DEA Uygulaması I	159
8.1	Giriş	159
8.2	Otel Modeli	161
8.3	Veri	163
8.4	Uygulama ve Sonuçlar	164

8.5	Değerlendirme	172
9	DEA Uygulaması II	173
9.1	Giriş	173
9.2	Banka Modeli	174
9.3	Veri	181
9.4	Uygulama ve Sonuçlar	182
9.5	Değerlendirme	196
9.6	Ek	199
10	Kritik ve Eklentiler	203

Şekil Listesi

2.1	Üretim İmkanları Kümesi	8
2.2	Üretim Sınırı	9
2.3	Referans Teknoloji	10
2.4	Verimlilik	12
2.5	Teknik Değişme	15
2.6	Teknik Etkinlik ve Verimlilik	16
2.7	Farrell'in Etkinlik Ölçümü	19
2.8	Parçalı Doğrusal Eş-Ürün Grafiği	22
2.9	Etkin Sınır	24
2.10	Çıktıya Yönelik Etkin Sınır	27
2.11	Eş-Maliyet Doğrusu	28
2.12	Optimum Faktör Bileşimi	29
2.13	Sonsuz Elemanlı Optimum Faktör Bileşim Kümesi	30
2.14	Fiyat Etkinliği	32
2.15	Çıktıya Yönelik Fiyat Etkinliği	32
2.16	Üretim Sınırı (Örnek I)	35
2.17	DRS (Örnek I)	37
2.18	IRS (Örnek I)	38
2.19	Etkin Sınır ve Eş-Maliyet Doğrusu (Örnek II)	40
2.20	Etkin Sınır ve Eş-Hasılat Doğrusu (Örnek III)	42

3.1	Örnek M_I	70
3.2	Örnek E_I^ϵ	81
4.1	Ölçeğe Göre Getiri, u_0^*	96
4.2	Örnek	107
4.3	Değiştirilmiş Örnek	109
4.4	NIRS ve NDRS	113
4.5	Çoklu MPSS	117
4.6	Banker-Thrall Örneği	125
4.7	MPSS Bölgesi Örnek	128
5.1	Tahsis Etkinliği Örneği	132
6.1	Kontrol Edilemeyen Girdi, x^f	139
6.2	Kontrol Edilemeyen Değişken Örneği	146
7.1	Malmquist TFP Endeksi	154
7.2	Malmquist Örneği	157
8.1	Etkinlik Analizi için Otel Modeli	161
9.1	Teknik Değişme	196
9.2	Etkinlik Değişimi	197
9.3	Malmquist TFP Endeksi	197
9.4	DEA-Etkinlik Skoru	198
9.5	Meksika Modeli	200

Tablo Listesi

2.1	Toplam Faktör Verimliliği	13
2.2	Girdi-Çıktı Miktarları (Örnek I)	34
2.3	Etkinlik Skorları (Örnek I)	36
2.4	DRS Altında Etkinlik (Örnek I)	38
2.5	IRS Altında Etkinlik (Örnek I)	38
2.6	Örnek II: Girdi-Çıktı Miktarları	39
2.7	Girdi-Çıktı Miktarları (Örnek III)	41
3.1	Çoklu Regresyon	47
3.2	Charnes-Cooper-Rhodes'un Örneği	52
3.3	M_I Örneği için Veri	69
3.4	M_I Örneği için $\tau^*, \mu^*, \nu_1^*, \nu_2^*$	72
3.5	M_I Örneği, Düal ve Aylak Değişkenler	73
3.6	E_I Örneği için τ, λ_i	75
3.7	E_I Örneği, Düal Değişkenler	76
3.8	Rol Modelleri	76
3.9	Karar Birimi D için Rol Modeli	77
3.10	Girdi Azalış - Çıktı Artış Miktarları	77
4.1	Toplam Etkinlik Skorları	104
4.2	Teknik Etkinlik Skorları	106
4.3	Ölçek Etkinliği Skorları	106

4.4	Değiştirilmiş Örnek	108
4.5	NIRS ve NDRS sonuçları	112
4.6	M_I Örneği, Optimal Düal Değişken Değerleri	114
4.7	Alternatif Optimal Çözüm için Örnek	116
4.8	Banker-Thrall Örneği	124
4.9	Banker-Thrall Örneği Sonuçları	126
4.10	Banker-Thrall, ρ_0^- ve ρ_0^+ Değerleri	126
4.11	MPSS Bölgesi Örnek	127
4.12	ρ_0^- ve ρ_0^+ Değerleri	129
5.1	Tahsis Etkinliği Örneği	132
7.1	Malmquist TFP Endeksi Örneği	157
7.2	Uzaklık Fonksiyon Değerleri	158
7.3	Etkinlik ve Teknik Değişme	158
8.1	Etkinlik Analizi Yapılan 21 Otele Ait Veri	165
8.2	Girdi-Çıktı Faktörleri Arasındaki Pearson Korelasyon Kat- sayıları	165
8.3	Kısıtlı <i>DEA-CCR</i> Model Sonuçları	168
8.4	Kısıtlı Düal <i>DEA-CCR</i> Model Sonuçları	169
8.5	Etkin Olmayan Oteller İçin Hedeflenen Girdi/Çıktı Mik- tarları	171
8.6	Girdi (Çıktı) Faktörleri için % Ortalama Azalış (Artış)	172
9.1	Banka Performans Ölçümünde Kullanılan Girdi/Çıktı	178
9.2	Etkinlik Analizi yapılan 21 Banka ve Kodları	181
9.3	6 Faktörlü Model için <i>CCR-DEA</i> Sonuçları	183
9.4	5 Faktörlü Model için <i>CCR-DEA</i> Sonuçları	184
9.5	Yıllar İtibariyle Etkinlik Skorları Arasındaki Korelasyon	185
9.6	Etkinlerin Mevduat Pazar Payı	186

9.7	5 Faktörlü <i>BCC-DEA</i> Modeli Sonuçları	187
9.8	Ölçek Etkinlikleri	188
9.9	Ölçeğe Göre Getiri	190
9.10	Uzaklık Fonksiyonu Değerleri (a)	191
9.11	Uzaklık Fonksiyonu Değerleri (b)	192
9.12	Uzaklık Fonksiyonu Değerleri (c)	193
9.13	Teknik Değişme	194
9.14	Etkinlik Değişimi	195
9.15	Malmquist TFP Endeksi	195
9.16	Meksika ve İtalya Modeli Sonuçları	201

Bölüm 1

Giriş

Modern işletmecilik anlayışının özünü oluşturan verimlilik ve etkinliğin ölçümü konusu güncelliğini koruyan bir olgudur. Özellikle ekonomide liberalleşme eğilimlerinin gelişmesiyle rasyonelleşme doğrultusundaki atılım ve girişimler artmış, bunun rekabet gücü ve verimlilik-etkinlik üzerindeki etkileri daha yakından ve duyarlılıkla izlenir olmuştur. Liberalleşme doğrultusunda geliştirilen ekonomi politikalarının ithal ikameci, içe dönük bir ekonomiden vazgeçilmesini öngörmesi, bunun yerine dışa dönük bir ekonomik büyüme modelinin benimsenmesini gerekli kılması, ülkeleri doğal olarak küreselleşme olarak tanımlanan olgu içine çekmiştir. Bu durum da verimlilik konusunun gerek sistem bütünü, gerekse tekil kuruluşlar açısından hayati değerde önem kazanmasına yol açmıştır. Dünya tek pazarını hedef alarak yeniden yapılanma sürecine giren ekonomilerde politika seçimleri genel anlamda "verimlilik-etkinlik" kavramına dayandırılmak gerekliliğini ortaya koymaktadır. Nitekim, sistemin ve onu oluşturan parçaların verimliliklerinin uluslararası rekabetçi düzeye çekilebilmesi, kamusal müdahale ve girişimlerin çapı ve yönünde, kuruluşların mülkiyet yapısı (kamu-özel) ile teknoloji ve ölçek açısından değişmelerini kaçınılmaz kılmaktadır. Bu nedenle dünya planındaki bir bütünleşme için çok yönlü yapılanma önlemleri ve bunların verimlilik-etkinlik üzerindeki etkilerini ölçmek için de çok yönlü ölçüm tekniklerinin kullanımının gerekliliği ortaya çıkmıştır. Yukarıda işaret edilen gerekleri yerine getirme amacına dönük olarak, bu çalışmada bir etkinlik ölçüm tekniği olan Veri Zarflama Analizi (**D**ata **E**nvelopment **A**nalysis-DEA) incelenmiştir.

Çalışmanın kapsamı şöyledir:

§2’de çalışma boyunca kullanılan temel kavramlar ele alınmıştır. Konu ile ilgili Türkçe yazın incelendiğinde genel eğilimin verimlilik ve etkinlik ile ilgili tanımlamaların sözel olarak yapılması yönünde olduğu görülür. Bu eksene oturtulan çalışmaların kavramları birbirleriyle çelişen şekilde kullandıklarına tanık olunmaktadır. Günümüzde Türkçe yazında yaşadığımız kavram karmaşasını ortadan kaldırma ve çağdaş ölçüm tekniklerini kullanma yönünde adım atmaya yönelik olarak, konunun sözel tanımlar yapmak yerine, üretim ekonomisi alanına dayanarak aksiyomatik bir yapı içinde anlatılması uygun bulunmuştur. Böylece, verimlilik ve etkinlik analizinin aslında bir ölçme sorunu olduğu vurgulanarak, matematiksel tekniklerin kullanımı özendirilmeye çalışılacaktır. Bu bağlamda ele alınan kavramlar arasında üretim imkanları kümesi, üretim sınırı, verimlilik, toplam faktör verimliliği, teknik etkinlik (veya saf teknik etkinlik), teknik değişme, ölçek etkinliği, ölçeğe göre artan-azalan-sabit getiri, Farrell etkinliği, en verimli ölçek büyüklüğü, toplam etkinlik, eş-ürün eğrisi, fiyat etkinliği, eş-maliyet doğrusu, eş-hasılat doğrusu bulunmaktadır. Bu kavramlara ilişkin tanımlamaları ve açıklamaları takiben örnekler verilmiştir.

§3’te ilk olarak etkinlik ölçümünde yaygın olarak kullanılan parametrik yöntemler tartışılmış ve gözlenen sakıncaların ortadan kaldırılmasına yönelik olarak parametrik olmayan yöntemlerden neler beklendiği belirlenmiştir. Bu beklentilere cevap vermeye yönelik olarak tasarlanan parametrik olmayan (matematiksel programlama tabanlı) etkinlik ölçüm tekniği Veri Zarflama Analizi’nin kesirli programlama modeli §3.2’de sunulmuştur. Kesirli programlama modellerinin çözüm zorluğu göz önüne alındığında, modellerin çözüm algoritması iyi bilinen doğrusal programlama yapısına dönüştürülmesinin sağlayacağı avantajlar açıktır. §3.3-3.4’te kesirli programlama modellerine denk doğrusal programlama modelleri verilmiştir. Doğrusal programlama modellerinin düal özellikleri kullanılarak, etkinlik açısından önemli yönetsel bilgiler içeren ve rol modellerinin tanımlanmasını sağlayan, düal modeller §3.5’te kurulmuştur. §3.6’da Arşimedgil olmayan modellerin önemi ve iki aşamalı çözüm yöntemleri tartışılmıştır.

İki temel etkinlik bileşeni olan teknik ve ölçek etkinliği §4’te incelenmiştir. İlk olarak Shephard uzaklık fonksiyonu ve toplam etkinlik arasındaki ilişki §4.1’de işlenmiştir. Ardından teknik etkinlik ölçümüne yönelik olarak, standart veri zarflama analizi modelinde yapılması gereken değişiklikler ele alınmıştır. Ölçeğe göre getiri ve en verimli ölçek büyük-

lüğünün belirlenmesi için oluşturulan modeller, orijinal çalışmalarda ele alındığı şekilde, aksiyomatik yapı içinde verilmiştir. Bunu takiben açıklayıcı örnekler sunulmuştur. Etkinlik analizinde önemli bir yeri olan ölçek büyüklüğüne bağlı olarak etkinlik değişiminin yönünün belirlenmesiyle ilgili bulgular §4.5'te özetlenmiştir. Etkinlik yazınında da ayrıntılı olarak tartışılmış olan alternatif çözümlerin varlığı halinde ölçeğe göre getirinin yönünün belirlenmesi sorununa ışık tutmak üzere geliştirilmiş olan yöntem bir örnekle birlikte §4.6'da sunulmuştur.

Teknik ve ölçek etkinliği gibi önemli bir etkinlik bileşeni olan tahsis etkinliğinin incelenmesi ise §5'te yapılmıştır. Girdi ve çıktı faktör fiyatlarının bilindiği durumda tahsis etkinliğinin nasıl hesaplanacağına ilişkin bir örnek verilmiştir. Teknik ve ölçek etkinliklerine ilave olarak tahsis etkinliği bileşeninin de ölçülebilmesi halinde iktisadi etkinlik skorunun bulunabileceği grafiksel olarak gösterilmiştir.

§6'da karar vericinin kontrol edemediği faktörlerin etkinlik analizine nasıl dahil edileceği hususu incelenmiştir. Bu inceleme iki ana grupta yapılmıştır. Bunlardan ilki, bazı girdi-çıkıtı faktörlerinin değerlerinin sabitlenmiş olması ve karar vericinin kontrolü altında bulunmaması halidir. Diğerisi ise, girdi-çıkıtı faktör değişkenlerinin sürekli olmaması sebebiyle sadece sonlu sayıda değer alması durumudur. Kategorik değişkenler olarak adlandırılan bu tür değişkenlerin etkinlik analizine bir tamsayı programlama modeli çerçevesinde dahil edilmesi §6.4'te anlatılmıştır.

§7'ye kadar olan kısımda gerçekleştirilen etkinlik analizleri statik yapıdadır. Her hangi bir anda karar birimlerinin etkinlik durumlarının bilinmesi ve etkinlik bileşenlerinin ayrıştırılabilmesi kendi başına son derece önemlidir. Ancak, karar birimlerinin zaman içinde etkinlik bağlamında gelişmesini yorumlayabilmek için statik analizin ötesinde yeni yaklaşımlara gereksinim duyulmaktadır. §7'de tanıtılmış olan Malmquist TFP endeksi teknik değişme ve etkinlik değişimini inceleme imkanı vermektedir. Farklı yöntemlerle oluşturulması mümkün olan bu endeks için günümüzde yaygın olarak kullanılan yaklaşım veri zarflama analizidir. Bu bağlamda, Malmquist TFP endeksinin veri zarflama analizi tekniğiyle oluşturulması ve sonuçlarının yorumlanması hususu bu kısımda gerçekleştirilmiştir.

Veri zarflama analizine ilişkin iki uygulama §8-9 kapsamında verilmiştir. İlk uygulama, Antalya yöresinde yer alan 4 ve 5 yıldızlı otellerin etkinlik analizine ilişkindir. Çıkıtı faktörleri üzerinde üst sınırın bulun-

ması halinde standart veri zarflama analizi modelleri kullanılmamış ve ek kısıtlara ihtiyaç duyulmuştur. İkinci uygulama ise Türk bankacılık sistemine ilişkin bir etkinlik analizini içermektedir. 1989-1996 arasındaki 8 yıllık dönemde analiz edilen 21 bankanın incelemesi Malmquist TFP endeksi oluşturularak yapılmıştır.

Son olarak, veri zarflama analizi üzerine bir kritik ve teknikte gerçekleştirilen fakat çalışma kapsamında yer almayan gelişmeler özet halinde §10'da verilmiştir.

Bölüm 2

Temel Kavramlar

2.1 Üretim Sınırı

Firma etkinliğinden bahsedildiğinde, genel anlamda, tüketilen girdilerle olabildiğince çok çıktı üretme başarısı anlaşılmaktadır. Farklı firma politikalarının etkinlik açısından sonuçlarını değerlendirebilmek için, etkinliğin gözlenmesi, dolayısıyla ölçülmesi gereklidir. Geleneksel etkinlik ölçümü, ileride incelenecek olan, *üretim sınırının* -veya *etkin üretim fonksiyonu*- ("production frontier" veya "efficient production function") bilindiği varsayımı altında yapılmaktadır¹. Diğer bir deyişle, firmanın gözlenen performansı, mutlak (veya mükemmel) etkinlik standardı ile kıyaslanmaktadır. Kullanılan standarda bağlı olarak, etkinlik ölçümlerinin farklı sonuç vermesi kaçınılmazdır. Bu bağlamda, etkinlik standardının, veya etkin üretim fonksiyonunun doğru şekilde belirlenmesi önemlidir.

Üretim sınırının belirlenmesinde iki temel yaklaşım olarak

- i mühendislik uygulamalarında yoğun olarak kullanılan teorik fonksiyon türetme, ve,
- ii gözlemlerden hareketle elde edilen ampirik fonksiyon belirleme

yaklaşımı sayılabilir.

¹Temel iktisat kitaplarında girdi ve çıktı arasındaki teknik ilişkiye referans verirken *üretim sınırı* yerine *üretim fonksiyonu* terimi kullanılmaktadır. İki terim de aynıdır. Etkinlik ölçümü ile ilgili literatürde ise *üretim sınırı* terimi fonksiyonun maksimum olma özelliğini vurgulamak için tercih edilmektedir. [52]

Teorik olarak ulaşılabilen en yüksek düzeyin mutlak etkinlik standardı olarak alınması doğal bir sonuçtur. Mühendislik uygulamalarında teorik hedeflerin ortaya konabilmesi mümkün olsa da karmaşık bir organizasyon olarak firma için aynı yorumu yapmak zordur. Bu şartlar altında kıyaslamamanın kesin olarak belirlenemeyen teorik fonksiyon yerine, mevcut uygulamalar göz önünde bulundurularak, en iyi uygulamalarla kıyaslanması daha anlamlıdır [73]. Teorik üretim fonksiyonları, tam olarak belirlenebilmeleri halinde, etkinlik standardı olarak kullanılabilirler. Hatta, bu fonksiyonların parametrik olarak ifade edilmeleri halinde getirecekleri çeşitli avantajlar bulunmaktadır. Bu çalışma teorik fonksiyonların pratikte elde edilmesinde karşılaşılan güçlükler -eğer imkansız değilse- dikkate alınarak, gözleme dayalı ampirik üretim fonksiyonları üzerine yoğunlaşmıştır.

Ampirik üretim fonksiyonuna ilişkin temel sorun, gözlem yapılan bir dizi üretim sürecinin kullandıkları girdi faktörlerinin ve ürettikleri çıktı faktörlerinin miktarları bilindiğinde, etkin üretim fonksiyonunun elde edilmesini sağlayacak bir metodolojinin kurulmasıdır. Çalışmanın kalan kısmında, yapılan gözlemlerin her biri, Charnes, Cooper ve Rhodes [40] izlenerek, *karar birimi* (decision making unit-DMU) olarak adlandırılacaktır.

Etkinlik analizine dahil edilecek karar birimi sayısı N ile gösterilecektir. Bu karar birimlerinin homojen oldukları, yani aynı amaca yönelik olarak, benzer şekilde üretim yaptıkları varsayılmaktadır. İncelenen sistemde, s tane çıktı faktörü, m tane girdi faktörü kullanılarak üretilmektedir. Her biri bir gözlem olan N tane karar birimi içinden karar birimi k 'nin, $k = 1, \dots, N$, kullandığı girdi i , $i = 1, \dots, m$, miktarı X_{ik} ve ürettiği çıktı r , $r = 1, \dots, s$, miktarı Y_{rk} olarak tanımlanmıştır. Mevcut teknolojiyle gerçekleştirilmesi mümkün olan girdi-çıktı karışımı (\vec{x}, \vec{y}) 'lerin kümesi *üretim imkanları kümesi*, Ω , (production possibility set) olarak tanımlanmaktadır.

Konuyla ilgili yazında temel alınan aksiyomatik yapı Yolalan [139] tarafından derlendiği şekliyle aşağıda verilmiştir.

Postulat 2.1. $(\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega, \vec{y} \neq 0 \Rightarrow \vec{x} \neq 0$

Postulat 2.2. $(\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega, \vec{x} < \infty \Rightarrow \vec{y} < \infty$

Postulat 2.3. $(\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega, \underline{\vec{x}} \geq \vec{x} \Rightarrow (\underline{\vec{x}}, \vec{y}) \in \Omega$

Postulat 2.4. $(\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega, \underline{\vec{y}} \leq \vec{y} \Rightarrow (\vec{x}, \underline{\vec{y}}) \in \Omega$

Postulat 2.5. $(\vec{x}_k, \vec{y}_k) \in \Omega, \forall k \in \{1, \dots, p\}$ ve $\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1, \lambda \geq 0$

$$\Rightarrow \Omega = \left\{ (\vec{x}, \vec{y}) \mid \vec{x} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{x}_k, \vec{y} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{y}_k \right\}$$

Postulat 2.6. $(\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega \Rightarrow (k\vec{x}, k\vec{y}) \in \Omega, k \in (0, 1]$

Postulat 2.7. $(\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega \Rightarrow (k\vec{x}, k\vec{y}) \in \Omega, k \in [1, \infty)$

Postulat 2.8. $\forall j = 1, \dots, N, (\vec{x}_j, \vec{y}_j) \in \Omega$

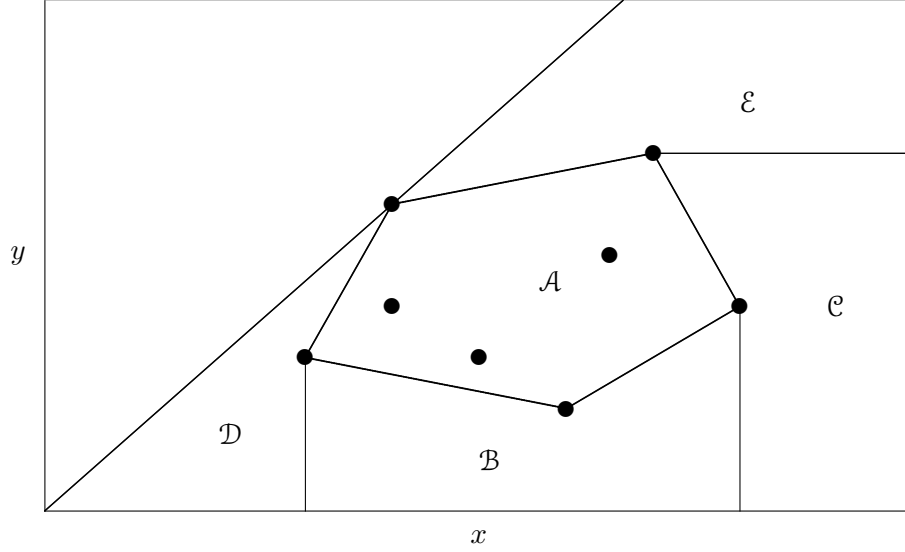
Postulat 2.9. Ω , tüm postulatları sağlayan en küçük kümedir.

Postulatlara ilişkin olarak Yolalan [139] tarafından yapılan açıklamalar ve ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir.

Postulat 2.1, üretim sürecinde çıktı gözlenebilmesi için girdi kullanılması gerektiğini ifade etmektedir. Postulat 2.2, sonlu miktarda girdinin üretim süreci sonunda yine sonlu miktarda çıktıya dönüşeceğini belirtmektedir. Postulat 2.3, istenmesi halinde, belirli bir çıktı düzeyine ulaşmak için gerekli olan girdi düzeyinden daha fazlasıyla da aynı çıktı düzeyine ulaşmanın mümkün olduğunu söylemektedir. Benzer şekilde, Postulat 2.4, istenmesi halinde, belirli bir çıktı düzeyine ulaşmak için gerekli olan girdi düzeyi ile daha az miktarda çıktı üretmenin mümkün olduğunu ifade etmektedir. Postulat 2.5, gözlenen karar birimlerinin çıktı ve girdi değerlerinin doğrusal kombinasyonlarının da, gözlenmemiş olsa dahi, mevcut şartlarda gerçekleştirilebilir olduğunu belirtmektedir. Bu postulat sonucunda, konveks bir küme tanımlanmaktadır. Postulat 2.6 ve 2.7, girdi-çıkıtı oranının değişmeden ölçeğin azaltılabileceğini veya artırılabilceğini sırasıyla ifade etmektedir. Postulat 2.8, gözlem kümesini oluşturan N tane karar biriminin üretim imkanları kümesini doğru şekilde temsil ettiğini ve Postulat 2.9 ise, etkinlik düzeyi mevcut gözlemlerden daha iyi olup gözlenmemiş olan karar birimlerinin bulunmadığını söylemektedir.

Şekil 2.1 'de tek girdi, x , ve tek çıktı, y , faktörünün bulunduğu durum ele alınmış ve sekiz karar birimi noktalarla gösterilmiştir. Şekil üzerinde tanımlanan \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , ve \mathcal{E} bölgeleri yardımıyla postulatların tanımladıkları kümeler aşağıda verilmiştir:

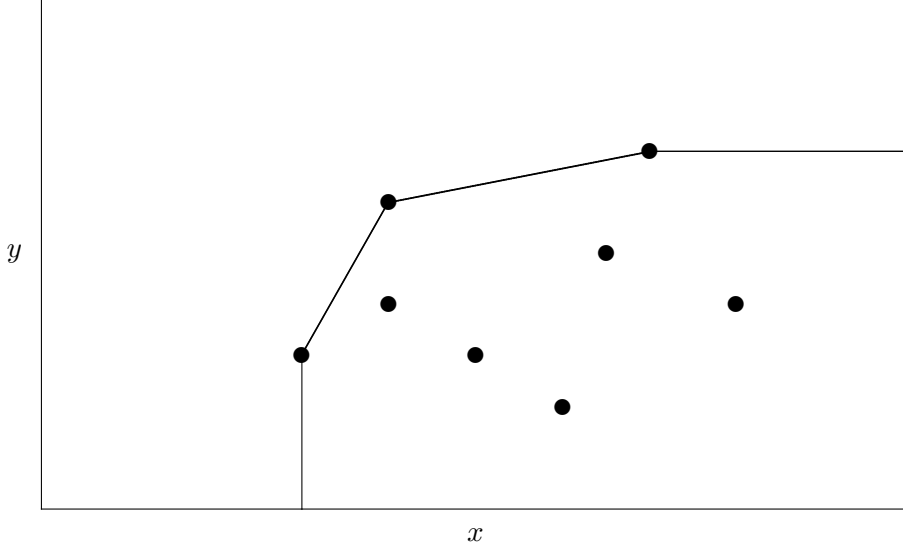
- Postulat 2.1, 2.2, 2.5, 2.8, 2.9 geçerli olduğunda tanımlanan üretim imkanları kümesi \mathcal{A} 'dır.



Şekil 2.1: Üretim İmkanları Kümesi

- Postulat 2.1, 2.2, 2.4, 2.5, 2.8, 2.9 geçerli olduğunda tanımlanan üretim imkanları kümesi $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ 'dir.
- Postulat 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.8, 2.9 geçerli olduğunda tanımlanan üretim imkanları kümesi $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 'dir.
- Postulat 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.8, 2.9 geçerli olduğunda üretim imkanları kümesi $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ 'dir.
- Postulat 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.7, 2.8, 2.9 geçerli olduğunda üretim imkanları kümesi $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{E}$ 'dir.
- Postulat 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9 geçerli olduğunda üretim imkanları kümesi $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$ 'dir.

Yukarıda, farklı postulatların kabulü sonucunda, farklı bölgelerin üretim imkanları kümesini tanımladığı görülmektedir. Bu üretim imkanları kümeleri arasında sadece \mathcal{A} tarafından tanımlanan üretim imkanları kümesi gerçekçi değildir. Çünkü, aynı miktarda girdi kullanarak daha az çıktı üretmenin mümkün olmayacağı varsayımı gerçekçi değildir. Diğer bir deyişle, kaynakların israf edilmesi sonucunda, olması gerekenden çok

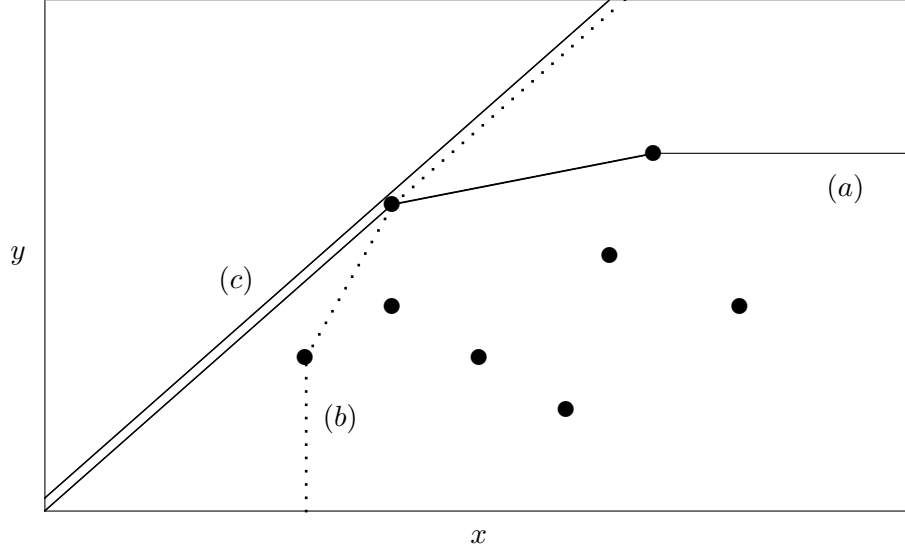


Şekil 2.2: Üretim Sınırı

daha az miktarda üretmek söz konusu olabilir. Bu nedenle \mathcal{A} bölgesine, \mathcal{B} 'nin de eklenmesi gerekir. Aksiyomatik yapıya eklenen Postulat 2.4'ün işlevi bahsedilen eksikliği gidermektir. Benzer şekilde, eğer çıktı miktarı belirli bir düzeyde sabit tutulursa, o zaman olması gerekenden çok daha fazla girdi kullanarak aynı üretim gerçekleştirilebilir. Bu ifade üretim imkanları kümesine \mathcal{C} 'nin de katılmasını, yani Postulat 2.3, gerektirmektedir. Elde edilen $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ üretim imkanları kümesinin sınırları, kullanılan postulatlar çerçevesinde, üretim sınırını göstermektedir. Şekil 2.2'de verilen sınır, geçerli postulatlar olan 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.8, 2.9 altında üretim sınırını göstermektedir. Tanımlanan postulatlar çerçevesinde, bu sınırın dışında her hangi bir karar birimini gözlemek imkansızdır; çünkü, sınırın ötesi üretim imkanları kümesinin dışında kalmaktadır.

Şekil 2.2'ye esas olan postulatlarla, sırasıyla, Postulat 2.6, Postulat 2.7 ve her iki postulat eklenerek üretim sınırı incelenmiştir.

Postulat 2.6 geçerli olduğunda, ölçeğin küçülmesiyle orantılı olarak, çıktı miktarının da azalacağı ifade edilmiş olmaktadır. Bölge \mathcal{D} 'de hiç bir karar biriminin gözlenmemiş olmasına rağmen, Postulat 2.6 ışığında,



Şekil 2.3: Referans Teknoloji

gözlenen karar birimlerinin ölçüklerini küçülterek D bölgesinde yer alabilecekleri kabul edilmektedir. Bu şartlar altında üretim imkanları kümesi $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ olur. Karşılık gelen üretim sınırı, Şekil 2.3'de, (a) ile gösterilmiştir.

Benzer bir yorumla, ölçeğin artmasıyla orantılı olarak çıktı miktarının artacağı varsayımı, Postulat 2.7'de ifadesini bulur. Bu varsayım ise, üretim imkanları kümesi olan $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 'ye \mathcal{E} 'nin eklenmesiyle sonuçlanır. Karşılık gelen üretim sınırı, Şekil 2.3'de (b) sınırı olarak gösterilmiştir.

Postulat 2.6 ve 2.7'nin birlikte kabul edilmesi durumunda üretim sınırı doğru şeklini alır, (c). Bu yapıdaki üretim sınırı, *ölçeğe göre sabit getiri* (Constant Return to Scale-CRS) sağlamaktadır. Ölçeğe göre sabit getiri varsayımı, etkinlik analizinde önemli yer tutmaktadır. İleride bu konuya tekrar dönülecek ve ayrıntılı açıklama yapılacaktır.

Bir organizasyonun üretim sınırının altında kalma derecesi onun *görelî etkinlik* ölçüsü olarak kullanılmaktadır. Üretim fonksiyonunun, sınır olarak, ilk defa ampirik incelemesi Farrell [73] ve Farrell ve Fieldhouse [72] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmaların sonucunda sınır esas alınarak

yapılan etkinlik kıyaslamaları *Farrell etkinlik ölçümü* olarak adlandırılmaya başlanmıştır.

2.2 Verimlilik

Performans ölçütlerinden biri olan ve yaygın olarak kullanılan *verimlilik* kavramının çoğu kez *etkinlik* kavramından farkı anlaşılmadan, yanlış kullanıldığı görülmektedir. Bu yüzden, verimlilik ve etkinlik kavramlarının taşıdıkları anlam farklarını ortaya koyma ihtiyacı hissedilmiştir.

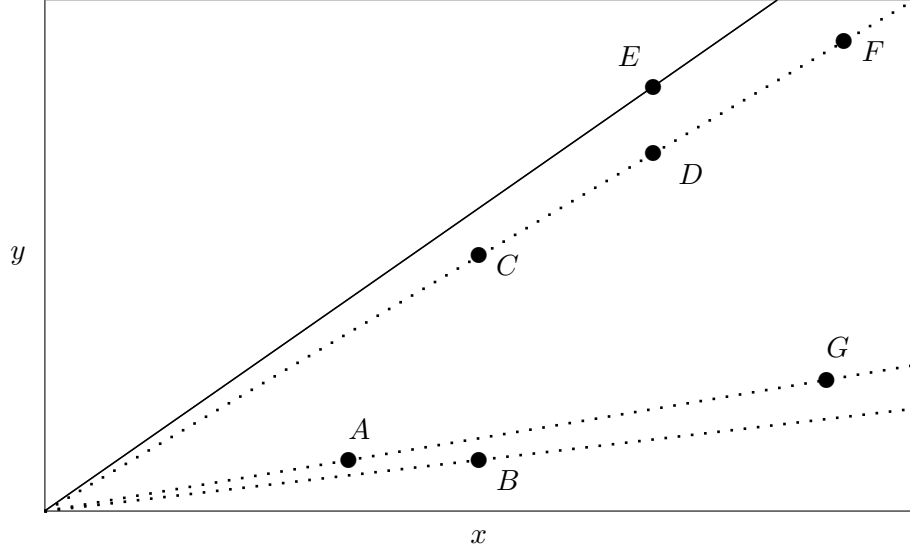
Verimlilik, veya diğer adıyla *üretkenlik* veya *prodüktivite* kavramı (productivity), en basit tanımıyla, çıktının girdiye oranıdır. Bu çerçevede, verimlilik kavramı göreceli bir kavram değildir. İncelenen karar birimlerinin verimliliklerini birbirlerinden bağımsız olarak ölçme imkanı vardır.

Tek girdi-tek çıktı durumu dikkate alındığında, her hangi bir karar biriminin verimliliği, çıktının girdiye oranı olarak tanımlanmaktadır. Diğer bir deyişle, (0,0) noktasından başlayan ve karar birimini temsil eden noktadan geçen ışının eğimi, bu karar birimi için verimlilik değerini vermektedir. Bu ışının eğiminin artması verimliliğin yükseldiğini göstermektedir. Şekil 2.4'te tek girdi-tek çıktı durumu için gözlenen çeşitli karar birimleri verilmiştir. Bu karar birimleri arasında en yüksek verimliliğe sahip karar biriminin *E* olduğu görülmektedir. Bu karar biriminden geçen ve eğimi verimlilik düzeyini gösteren ışın kesiksiz çizgi ile gösterilmiştir. Gözlemler arasında en düşük verimliliğe *B* karar birimi sahiptir. *A* ve *G* karar birimleri birbirlerinden çok farklı ölçekte çalışmalarına rağmen aynı verimlilik düzeyindedirler. Benzer şekilde, *C*, *D* ve *F* karar birimleri de aynı verimlilik düzeyinde olup, verimlilik değeri *E*'den küçük, diğerlerinden büyüktür.

En yüksek verimliliğe sahip olan *E* karar biriminin bulunduğu ölçek büyüklüğü, Banker tarafından [6], *en verimli ölçek büyüklüğü* (**M**ost **P**roductive **S**cale **S**ize-**M**PSS) olarak tanımlanmıştır. Optimum olan bu ölçek büyüklüğünün üzerine çıkınca veya altında kalınca karar birimlerinin verimliliklerinin düştüğü gözlenmektedir.

MPSS olarak tanımlanan ölçek büyüklüğünün üstünde ve altındaki ölçek büyüklükleri ile ilgili bazı saptamalar ileride yapılacaktır.

Üretim süreçlerinin tamamına yakını, burada incelenen durumdan



Şekil 2.4: Verimlilik

farklı olarak, birden çok girdi faktörü kullanarak, birden çok çıktı faktörü üretmektedirler. Bu şartlar altında tek bir girdi faktörü ve tek bir çıktı faktörünü diğerlerinden ayırarak verimlilik değerlendirmesi yapmak belirleyici olmamaktadır. Nitekim, İngiltere’de orta öğretime yönelik olarak hazırlanan bir raporda, okulların verimliliklerinin ölçüsü olarak 60 farklı oran tanımlanmıştır. Benzer şekilde, yine İngiltere’de, Sağlık Bakanlığı tarafından sağlık kuruluşlarının verimliliklerinin ölçülmesine yönelik olarak 450 farklı oran belirlenmiştir. Fakat, bu oranlar yarattıkları belirsizlik sebebiyle eleştiriye uğramış ve uygulamada yer bulamamışlardır. Tablo 2.1 bu duruma ilişkin, Sexton [119] tarafından kullanılan bir örneği göstermektedir.

İncelenen 6 karar biriminin, A , B , C , D , E , F , üretim sürecinde kullandıkları iki tür girdi, I_1 ve I_2 , ve ürettikleri iki tür çıktı, O_1 ve O_2 , bulunmaktadır. Bu şartlar altında 4 ayrı oran, kısmi verimlilik, tanımlamak mümkündür, $\{O_1/I_1, O_2/I_1, O_1/I_2, O_2/I_2\}$. Bu oranlar hesaplanmış ve tabloda sütun 6-9 olarak verilmiştir. Eğer O_1/I_1 rasyosu esas alınır, en verimli karar birimi olarak C , en verimsiz karar birimi olarak B bulunur. Verimlilik indikatörü olarak O_2/I_1 rasyosunun seçilmesi durumunda, en

DMU	Girdiler		Çıktılar		Oranlar			
	I_1	I_2	O_1	O_2	O_1/I_1	O_2/I_1	O_1/I_2	O_2/I_2
<i>A</i>	1.5	0.2	1.4	0.35	0.933	0.23	7.000	1.750
<i>B</i>	4.0	0.7	1.4	2.10	0.350	0.52	2.000	3.000
<i>C</i>	3.2	1.2	4.2	1.05	1.313	0.32	3.500	0.875
<i>D</i>	5.2	2.0	2.8	4.20	0.538	0.80	1.400	2.100
<i>E</i>	3.5	1.2	1.9	2.50	0.543	0.71	1.583	2.083
<i>F</i>	3.2	0.7	1.4	1.50	0.438	0.46	2.000	2.143

Tablo 2.1: Toplam Faktör Verimliliği

verimli karar birimi *D*, en verimsiz karar birimi *A*'dır. O_1/I_2 rasyosuna göre yapılacak bir sıralama sonucunda, *A* en verimli, *D* en verimsiz karar birimi olarak değerlendirilir. O_2/I_2 rasyosunun verimlilik göstergesi olarak seçilmesi halinde ise, en verimli karar birimi *B*, en verimsiz karar birimi *C* bulunur. Kullanılan her orana göre farklı karar birimi en verimli bulunmuştur. Bunun da ötesinde, bir orana göre en verimli bulunan karar birimi bir başka orana göre en verimsiz olarak değerlendirilmektedir. *E* ve *F* karar birimleri ise hiç bir faktöre göre en verimli bulunmazken, hiçbir zaman da en verimsiz olarak değerlendirilmemişlerdir.

Bu örnekten de rahatlıkla görüleceği üzere, çok girdili ve çok çıktılı üretim süreçlerinin verimliliklerinin ölçülmesinde basit oran yaklaşımı yetersiz kalmaktadır. Bir oran analizi olan basit verimlilik ölçümünün bahsedilen sakıncalarını ortadan kaldırmak üzere toplam faktör verimliliği veya toplam faktör üretkenliği (Total Factor Productivity-TFP) kavramından faydalanılmaktadır. Toplam faktör verimliliğinde, üretim sürecinin girdileri toplanarak tek bir girdi faktörüne (sanal girdi) ve çıktıların toplamı da tek bir çıktı faktörüne (sanal çıktı) indirgenmektedir. Daha sonra toplam girdi ve toplam çıktı faktörlerinin oranına bakılarak değerlendirme yapılmaktadır. Bu yaklaşımın en zayıf noktası, farklı özellikteki girdi ve çıktı faktörlerinin nasıl toplanacağı konusunda herhangi bir ipucu verememesidir. Diğer bir deyişle, faktörler için uygulanacak olan katsayıların bilinmiyor olmasıdır. Bu konuda yeni açılımlar getirmiş olan DEA tekniği Bölüm 3 kapsamında tanıtılmıştır.

2.3 Teknik Etkinlik²

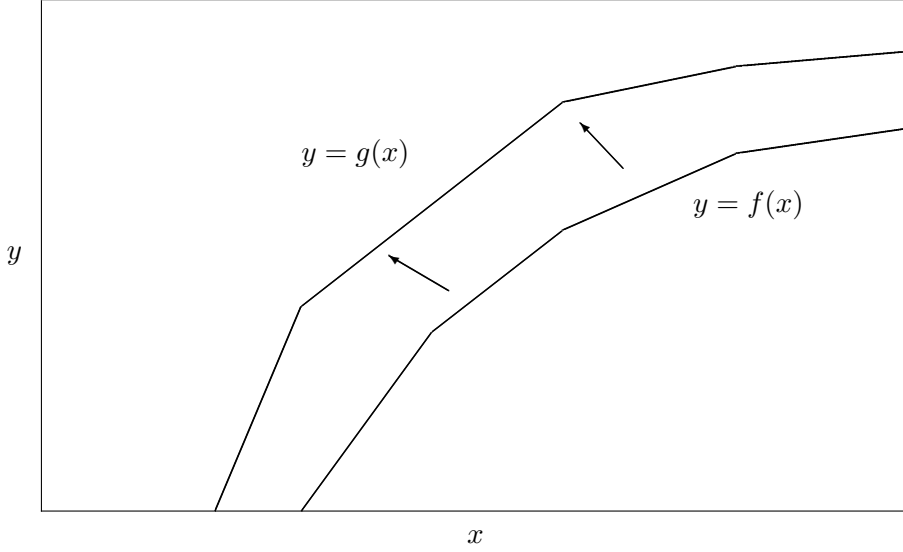
Üretim girdilerin çıktılara dönüştürülme sürecidir. Bu sürecin etkin olabilmesi, zaman boyutu dikkate alınmadığında mevcut teknoloji çerçevesinde, belirli bir girdi bileşiminin kullanılarak maksimum çıktının elde edilmesine veya belirli bir çıktı bileşiminin en az girdi kullanılarak üretilmesine bağlıdır.

Daha önce tanımlandığı üzere (s.6), üretim sürecinde kullanılan girdiler m boyutlu \vec{x} vektörü ve üretilen çıktılar s boyutlu \vec{y} vektörü ile gösterilecektir. Bu bağlamda üretim imkanları kümesi, tüm mümkün X^t girdileri ve karşılık gelen tüm mümkün Y^t çıktılarının kümesi olarak Ω ile gösterilmektedir. Böylece Ω , t dönemindeki veya t karar birimi için tüm mümkün girdi-çıkıtı bileşimlerinin kümesidir. Ω kümesindeki bazı elemanlar (girdi-çıkıtı bileşimleri, $\omega_t \in \Omega$) diğerlerine göre daha az savurgandır ve bu bağlamda daha etkin olarak tanımlanır. ω_t elemanı için eğer çıktılardan bir kısmını girdileri sabit tutarak artırmak mümkün değilse, bu eleman için üretim sürecinde israfta bulunmadığı söylenir. İsrafın olmaması *teknik etkinlik* kavramı ile ifade edilmektedir. Diğer bir deyişle, teknik etkinlik, girdi bileşiminin en verimli şekilde kullanılarak mümkün olan maksimum çıktıyı üretme başarısıdır. Açıklamalar çerçevesinde, teknik etkin olan karar birimlerinin üretim sınırı üzerinde yer almaları gerekmektedir. Üretim sınırının altında kalan karar birimlerinin, göreceli olarak, kaynaklarını israf ettikleri söylenebilir. Bu noktada referans verilen karar birimleri üretim sınırını tanımlayan karar birimleri ve bunların doğrusal kombinasyonları sonucunda oluşan hipotetik karar birimleridir.

Bu bağlamda üretim sınırı (üretim fonksiyonu veya etkin üretim fonksiyonu) teknik etkin olan tüm mümkün üretim karışımlarının kümesidir. İlgili yazında, bu tanımları sebebiyle, *etkin sınır* olarak ta kullanılmaktadır. Üretim fonksiyonu ile ilgili olarak Forsund ve diğerleri [76] tarafından yapılan yazın taraması incelenebilir.

Eğer üretim sınırı $F(X^t, Y^t) = 0$ kapalı formunda tanımlanırsa, teknik açıdan etkin olmayan üretim karışımlarını $F(X^t, Y^t) < 0$ ifade ederken, teknoloji Ω kullanılarak üretilmesi mümkün olmayan karışımları

²Bu çalışmada kullanılan *teknik etkinlik* terimi literatürde kimi zaman *saf teknik etkinlik* (pure technical efficiency) olarak adlandırılmaktadır. Saf teknik etkinlik teriminin kullanıldığı çalışmalarda yer alan *teknik etkinlik* terimi ise bu çalışmada olduğu gibi *toplam etkinlik* veya *DEA etkinliği* terimlerine karşılık gelmektedir.



Şekil 2.5: Teknik Değişme

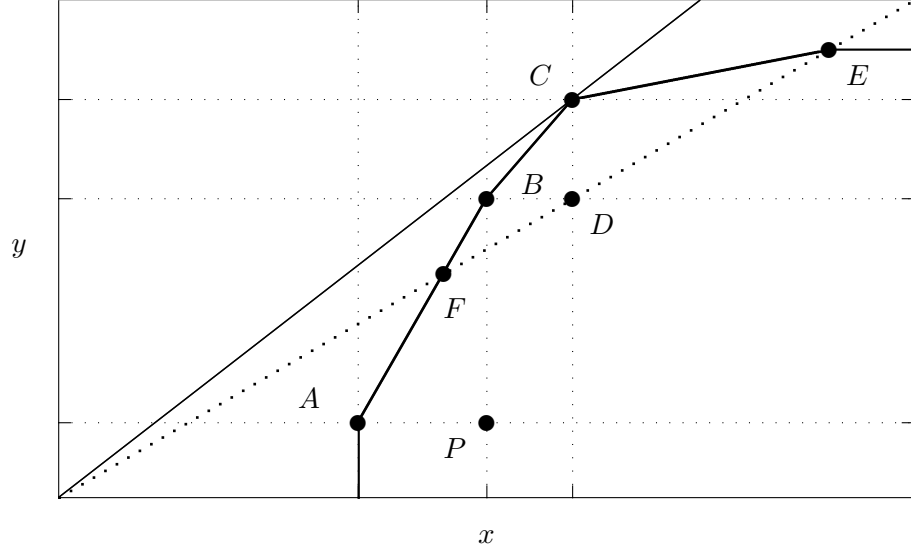
$F(X^t, Y^t) > 0$ tanımlar. Etkinliğin bu tanımı Koopmans [90] tarafından yapılmıştır.

Bu notasyon çerçevesinde, *teknik değişme* $\Omega = \{(X^t, Y^t) | F(X^t, Y^t) \leq 0\}$ 'nin (üretim fonksiyonu $y = f(x)$), $\Phi = \{(X^t, Y^t) | G(X^t, Y^t) \leq 0\}$ 'ye (üretim fonksiyonu $y = g(x)$) dönüşmesi sonucu gerçekleşir. Değişimin teknik ilerleme yönünde olabilmesi için, açıktır ki, $\Omega \subseteq \Phi$ olmalıdır. Şekil 2.5 teknik ilerlemeyi göstermektedir.

Teknik etkinlik ve verimlilik arasındaki farkı açıkça ortaya koymak üzere Şekil 2.6 verilmiştir.

Şekil 2.6'da verilen A ve B gözlemleri üretim sınırında yer almakta ve teknik etkin olarak tanımlanmaktadır. P gözlemi ise, A ile aynı çıktı düzeyini daha fazla girdi kullanarak gerçekleştirmiştir. Öte yandan, P karar birimi, B ile aynı miktarda girdi kullanmış olmasına rağmen daha az çıktı üretmiştir. Bu yüzden, P 'nin teknik etkinsizlik içinde olduğu yorumu yapılır.

Bu üç gözlemin verimlilikleri, çıktı/girdi oranından hesaplanmakta, ve sonuçta, B 'nin diğer iki karar biriminden daha verimli olduğu, P 'nin



Şekil 2.6: Teknik Etkinlik ve Verimlilik

ise en verimsiz karar birimi olduğu sonucuna varılmaktadır. A gözlemi teknik etkin olarak değerlendirilmesine karşın B 'ye kıyasla verimliliği düşüktür.

2.4 Ölçek Etkinliği

P gözlemi B gözlemine doğru kayarak teknik etkinliğini ve verimliliğini artırabilir. Çünkü sırasıyla üretim sınırına yaklaşmakta ve çıktı/girdi oranı büyümektedir. A gözlemi ise B gözlemine doğru kayarak teknik etkinliğini korurken ölçekten kaynaklanan avantajla verimliliğini artırabilir. Çünkü, üretim sınırından ayrılmamakta ve çıktı/girdi oranı büyümektedir. Göreli olarak en verimli olan C gözlemi Banker tarafından tanımlandığı şekliyle en verimli ölçek büyüklüğüne (Most Productive Scale Size-MPSS) sahiptir.

C karar birimi ile D karar birimi karşılaştırıldığında, D karar biriminin üretim sınırı üzerinde olmaması sebebiyle kaynak israfında bulunduğu gözlenir. Buna karşın, D karar birimi, en verimli ölçek büyüklüğüne

sahip olan C karar birimi ile aynı girdi ölçeğindedir. Bunun sonucu olarak, D karar biriminin optimum ölçekte olduğu ancak kaynaklarını iyi kullanamadığı sonucuna varılır.

A karar birimi ile D karar biriminin karşılaştırılması sonucunda, A karar biriminin teknik olarak etkin, fakat D karar biriminin teknik etkin olmadığı görülür. Diğer taraftan, D karar biriminin verimliliği, A karar biriminin verimliliğinin üzerindedir. Diğer bir deyişle, teknik etkin olan bir gözlem teknik etkinsizlik yaşayan bir gözlemle kıyaslandığında verimsiz bulunabilir. Bu basit örnekle, günlük konuşma dilinde aradaki ayrıma dikkat edilmeden kullanılan, teknik anlamında etkinlik ve verimlilik kavramlarından birinin diğerini içermediği görülmüştür.

Bir başka ilginç gözlem, $F - D - E$ karar birimleri üzerine yapılabilir. Bahsedilen üç karar birimi de aynı verimlilik düzeyindedir. Ancak, bu üç karar biriminden optimum ölçekte faaliyette bulunan sadece D karar birimidir. Diğer iki karar birimi olan F ve E teknik olarak etkin olmalarına karşın optimum ölçekte faaliyet göstermemektedirler.

Teknik etkinliğin yanında, bir başka performans indikatörü olarak en verimli ölçek büyüklüğüne olan yakınlık alınmalıdır. Bu kavram *ölçek etkinliği* olarak adlandırılmaktadır. Şekil 2.6 incelendiğinde, C ve D karar birimlerinin her ikisinin de ölçek etkin oldukları, fakat bu ikisinden sadece C 'nin teknik etkin olduğu, D 'nin ise teknik etkinsiz olduğu; A , B , E ve F karar birimlerinin teknik etkin olmalarına karşın ölçek etkin olmadıkları; P karar biriminin ne ölçek etkin ne de teknik etkin olduğu yorumu yapılır.

Aynı verimlilik düzeyinde bulunan ve her ikisi de teknik etkin olan F ve E karar birimleri ölçek açısından değerlendirildiklerinde, her ikisinin de ölçek etkin olmadıklarının ötesinde bir yorumda bulunmak mümkündür. F gözlemi incelendiğinde, bu karar biriminin, teknik etkinliği korumak kaydıyla, ölçeğini büyüttüğü zaman verimliliğinin artacağı yorumu yapılabilir. Bu durum, *ölçeğe göre artan getiri* (**I**ncreasing **R**eturn to **S**cale-IRS) olarak isimlendirilir. Şekil 2.3 kapsamında verilen (b) üretim sınırı ölçeğe göre artan getiri özelliği göstermektedir.

E karar birimi ise, teknik etkinliğini koruyarak ölçeğini küçülttüğü zaman verimliliğinde artış gözleyecektir. Bu durum, *ölçeğe göre azalan getiri* (**D**ecreasing veya **D**iminishing **R**eturn to **S**cale-DRS) olarak isimlendirilir. Şekil 2.3 kapsamında verilen (a) üretim sınırı ölçeğe göre azalan getiri özelliği göstermektedir.

Üretim sınırında, ölçeğe göre artan, azalan ve sabit getiri aralıklarının birlikte bulunabileceğinin kabulü, *ölçeğe göre değişken getiri* (Variable Return to Scale-VRS) kavramıyla tanımlanmaktadır. Şekil 2.2 kapsamında verilen üretim sınırı ölçeğe göre değişken getiri özelliği göstermektedir. Bu üretim sınırında, ölçeğe göre sabit getiri sağlayan girdi aralığının bulunmadığına dikkat edilmelidir. Diğer bir deyişle, üretim sınırı, ölçeğe göre artan getiri bölgesinden direkt olarak ölçeğe göre azalan getiri bölgesine geçmektedir.

2.5 Farrell Etkinlik Ölçümü

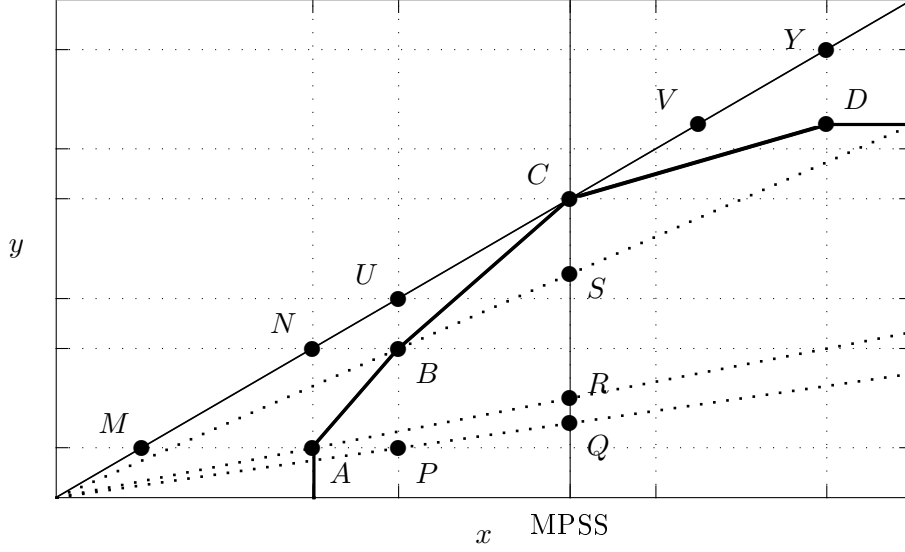
§2.4 çerçevesinde, eldeki girdi bileşiminin en uygun biçimde kullanılarak mümkün olan maksimum çıktının üretilmesindeki başarı *teknik etkinlik*, ve uygun ölçekte üretim yapmadaki başarı da *ölçek etkinliği* olarak tanımlanmıştır. Bu etkinlik skorlarının ölçülmesine ilişkin yaklaşımlar bu kısımda incelenecektir.

Teknik etkinlik ve ölçek etkinliği ile ilgili ölçüm yaklaşımı, tek-girdi tek-çıkıtı durumu için grafik yardımıyla açıklanmıştır. Notasyon olarak, indis x ilgili karar biriminin girdi miktarını gösterirken, indis y karar biriminin çıktı miktarını göstermektedir. Şekil 2.7'de gösterilen teknoloji f 'nin üretim sınırı üzerinde olan A, B, C ve D noktaları teknik etkindir. P, Q, R ve S noktaları üretim sınırı üzerinde yer almadıkları için teknik etkin değildir. M, N, U, V ve Y noktaları ise teknoloji f için mümkün olmayan üretim karışımlarını göstermektedir.

P noktasının verimliliği, tanım gereği, P_y/P_x olarak ifade edilir. Teknoloji f 'nin teknik etkin olarak kullanılması durumunda P_x girdisi ile üretilmesi mümkün olan çıktı miktarı B_y kadardır. Bu bağlamda, gerçekleşen ve olması gereken maksimum çıktıdan hareketle, P noktasının *çıkıtıya yönelik teknik etkinliği* (output oriented technical efficiency) bulunabilir. Teknik etkinlik skorunun hesaplanmasında Farrell'in yaklaşımı çerçevesinde, aynı miktarda girdi kullanan ve teknik etkinliği görece olarak tam olan B karar biriminin verimliliğiyle, P karar biriminin verimliliğinin oranlanması sonucu, P 'nin teknik etkinlik skoru bulunur:

$$(P_y/P_x)/(B_y/B_x) = P_y/B_y.$$

Benzer şekilde P noktasının *girdiye yönelik teknik etkinliği* (input oriented technical efficiency), çıktı düzeyi sabit tutularak,



Şekil 2.7: Farrell'in Etkinlik Ölçümü

$$(P_y/P_x)/(A_y/A_x) = A_x/P_x$$

bulunur.

Açıktır ki, üretim sınırının doğrusal olmadığı durumlarda, yani ölçeğe göre değişken getiri varsayımının geçerli olduğu durumlarda, çıktıya ve girdiye yönelik teknik etkinlik değerleri, görece teknik etkin olanlar hariçindekiler için, eşit olmayabilir; etkin olanlar için bu değer girdi ve çıktı miktarına göre farklılık göstermez ve değeri 1.0'dir.

Teknik etkinlik skorlarıyla ilgili dikkat edilmesi gereken bir nokta, maksimum değerinin 1.0 olduğudur. Üretim sınırının üzerinde bulunan, tam görece teknik etkin karar birimleri, etkinlik skoru olarak 1.0 değeri alırlar. Çünkü, verimlilikleri kendi verimlilikleriyle kıyaslandığında etkinliği veren oran 1.0 değerini vermektedir.

Şekil 2.7 incelendiğinde, gözlenen karar birimlerine karşılık gelen noktalar arasında C noktasının kullandığı miktarın MPSS olduğu görülmektedir. Teknoloji f altında C'den daha az veya daha çok girdi kullanmak, diğer bir deyişle sırasıyla ölçeği küçültmek veya büyültmek verimliliği azaltmaktadır. Girdinin azaltılmasının ölçeğe göre artan getiri, ve ar-

tırılmasının ise ölçeğe göre azalan getiriye yol açtığı §2.4 kapsamında incelenmişti. Eğer ölçeğe göre sabit getiri varsayımı geçerli olursa ve bir C noktası gözlenirse, o zaman, doğrusal bir üretim sınırı olan teknoloji g tanımlanır. $y = g(x)$ üzerindeki tüm noktalar, üretim sınırı üzerinde oldukları için teknik etkindirler. Bu noktalar, en verimli ölçek büyüklüğüne sahip olan C ile aynı verimlilikte oldukları için, ayrıca, ölçek etkindirler. Göreli teknik ve ölçek etkinliği tam olan karar birimleri, *toplam etkin* (total efficient) olarak adlandırılmaktadır.

Ölçeğe göre sabit getiri varsayımı kabul edildiğinde, çıktı sabit tutulup, girdi yönelimli olarak P noktasının etkinliği incelendiğinde, P 'nin idealde olması gereken yerin M noktasının koordinatları olduğu görülür. P noktasının, M 'nin girdi-çıktı bileşimini yakalayabilmesi halinde toplam etkinliği 1.0 olacaktır. Bu arada M 'nin üretim sınırının dışında kalan hipotetik bir nokta olduğu unutulmamalıdır. Fakat P noktasının gerçekleşen toplam etkinliği, tanımdan

$$(P_y/P_x)/(M_y/M_x) = M_x/P_x$$

olarak bulunur ve 1.0 değerinden küçüktür. P noktasının girdiye yönelik teknik etkinliği, yukarıda bulunduğu üzere, A_x/P_x 'dir.

P noktasının, A noktasına doğru ilerletilmesi sonucu, çıktı miktarında değişiklik olmadan, girdi miktarı azaltılmaktadır ve P teknik etkinliği yalamaktadır. Bu ilk aşamadan sonra, P noktasının M noktasına doğru daha ileriye götürülmesi halinde, tam toplam etkinliğe ulaşılmış olacaktır. Böylece, P 'nin yolculuğunun, A ve M arasındaki kısmına karşılık gelen etkinlik bileşeni ölçekle ilgili etkinsizliktir sonucuna varılır.

A karar biriminin teknik etkinliği göreli olarak tamdır ($\tau_t = 1.0$). Bu karar biriminin, ölçeğe göre sabit getiri varsayımı altında ve girdiye yönelik olarak bulunması gereken ideal koordinatlar, M 'nin koordinatlarıdır. Mevcut durumda, A ve M 'nin verimlilikleri kıyaslandığında

$$(A_y/A_x)/(M_y/M_x) = M_x/A_x$$

bulunur. M karar birimi, A 'ya kıyasla daha az girdi kullandığı için M_x/A_x oranı 1.0'den küçüktür. A 'nın teknik etkinlik skorunun tam olduğu düşünülürse, elde edilen skor sadece ölçek etkinlik skorudur. Öte yandan, P ve A 'nın her ikisi de aynı ölçek etkinliğine sahip olmalıdır. Çünkü, P ve A aynı miktarda çıktı üretmektedir ve P 'nin A 'dan daha fazla girdi kullanmasının sebebi, teknik etkinsizliğidir. Dolayısıyla, M_x/A_x oranı aynı zamanda P 'nin ölçek etkinlik skorudur. Dikkat edilmesi gereken nokta, P 'nin ölçek etkinliğinin değeri belirlenirken, artık

P noktasının koordinatları yerine, P 'ye teknik etkin bir rol modeli olan A 'nın koordinatlarının esas alınmasıdır.

Bu açıklamalar çerçevesinde P karar biriminin

$$\text{Toplam etkinlik skoru} = M_x/P_x$$

$$\text{Ölçek etkinliği skoru} = M_x/A_x$$

$$\text{Teknik etkinlik skoru} = A_x/P_x$$

bulunur. Açıkça görüldüğü üzere, *toplam etkinlik* (total efficiency) değeri, teknik etkinlik ve ölçek etkinlik değerlerinin çarpımına eşit olarak tanımlanmıştır.

Yukarıda, girdiye yönelik olarak verilen etkinlik ölçme süreci, çıktıya yönelik olarak da incelenebilir. P karar biriminin çıktıya yönelik etkinliği incelendiğinde, ölçeğe göre değişken getiri varsayımı altında, rol modeli olarak B karar birimi görülmektedir. Çünkü, B karar birimi P ile aynı miktarda girdi kullanmakta ve bu ölçekte gözlenen maksimum çıktıyı üretmektedir. P 'nin teknik etkinliği

$$(P_y/P_x)/(B_y/B_x) = P_y/B_y$$

bulunur. P 'nin ölçek etkinliği hesaplanırken, teknik etkinliğinin tam olduğu nokta olan B 'de olduğu düşünülerek,

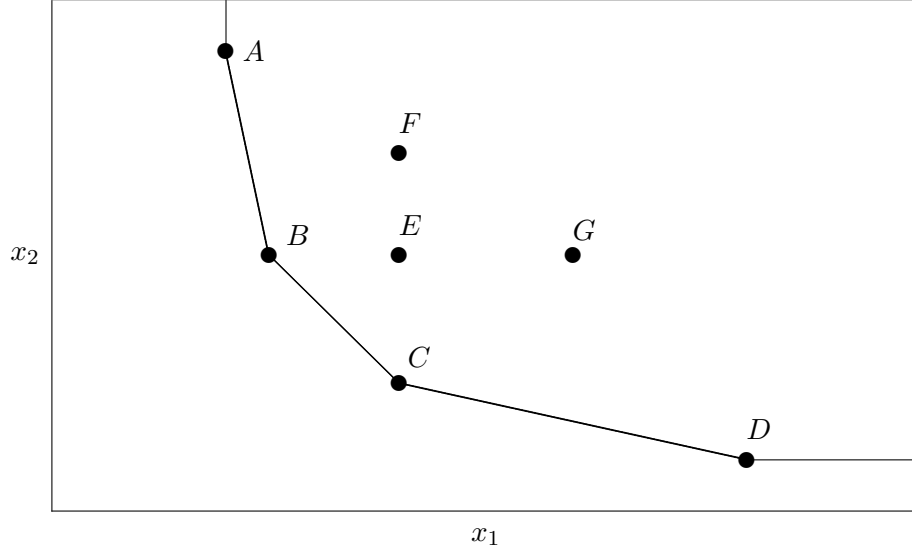
$$(B_y/B_x)/(U_y/U_x) = B_y/U_y$$

elde edilir. Toplam etkinlik tanımı kullanılarak,

$$(P_y/B_y) \times (B_y/U_y) = P_y/U_y$$

bulunur.

Etkinlik ölçümünde referans verilen teknoloji belirleyicidir. Bu konuyla ilgili olarak Grosskopf'un [84] çalışması incelenebilir. Farrell etkinliğine alternatif olabilecek başka tanımlamalar yapılmıştır. Bunlar arasında en çok tanınanları *Russell etkinliği* ve *Zayıf etkinlik* (Weak Efficiency). Russell etkinliği Fare ve Lovell [71] tarafından geliştirilmiştir. Zayıf etkinlik tanımı ise Fare ve Grosskopf [61] tarafından önerilmiştir. Russel ve Zayıf etkinlik tanımlarını birleştirerek yeni bir etkinlik tanımına varan bir çalışma da Zieschang [142] tarafından yapılmıştır. Etkinlik ölçüm ve referans teknoloji tanımlarıyla ilgili bir tartışma Fare ve Hunsaker'da [70] verilmiştir. Referans teknoloji tanımlarının özet bir sunumu Yolalan'da [139] bulunmaktadır.



Şekil 2.8: Parçalı Doğrusal Eş-Ürün Grafiği

2.6 Eş-Ürün Eğrileri ve Etkin Sınır

Eş-ürün eğrileri, karar biriminin belirli bir çıktı miktarını, girdi faktörlerinden ne miktarda kullanarak üretebileceğini gösterir. Girdi faktörleri, tek bir çıktı faktörünün üretiminde farklı oranlarda kullanılabilirse, yani birbirleri yerine ikame edilebiliyorsa, üretim fonksiyonu $y = f(x_1, x_2)$ (sadece iki girdi olduğu durumda) şeklinde yazılabilir. Verilen ifadeye, y sabit çıktı miktarını, x_1 ve x_2 ise iki girdi faktörünün y çıktı miktarını verebilecek karışımlarını göstermektedir. Sabit üretim düzeyini sağlayan çeşitli faktör bileşimlerinin geometrik yeri *eş-ürün eğrisi* olarak tanımlanmaktadır. Şekil 2.8, tipik bir eş-ürün grafiğini göstermektedir. Bu grafikte, konvekslik varsayımı altında, ampirik olarak çizilen eş-ürün grafiği *parçalı doğrusaldır* (*piecewise linear*).

Eş-ürün eğrisinin eğimi, üretim faktörleri arasındaki *marjinal teknik ikame oranına* eşittir. Şekilde verilen grafik parçalı doğrusal olduğu için, sınırı tanımlayan gözlemler arasında marjinal teknik ikame oranı sabittir. $y = f(x_1, x_2)$ 'nin teorik olarak, sürekli ve kıraksız tanımlanması halinde, marjinal teknik ikame oranı sürekli azalan bir özellik gösterecek

ve konveks bir küme tanımlayacaktır. Bunun nedeni, girdi faktörlerinden birinin miktarı artırıldıkça, diğer girdi faktörü ile ikamesinin giderek güçleşmekte olması, ve belirli bir bileşimin ötesinde ikamenin artık mümkün olmamasıdır. Nitekim, Şekil 2.8, D gözleminin kullandığından daha fazla x_1 girdi faktöründen kullanılmasının, diğer girdi faktörü olan x_2 'de her hangi bir azalışa neden olmadığını söylemektedir.

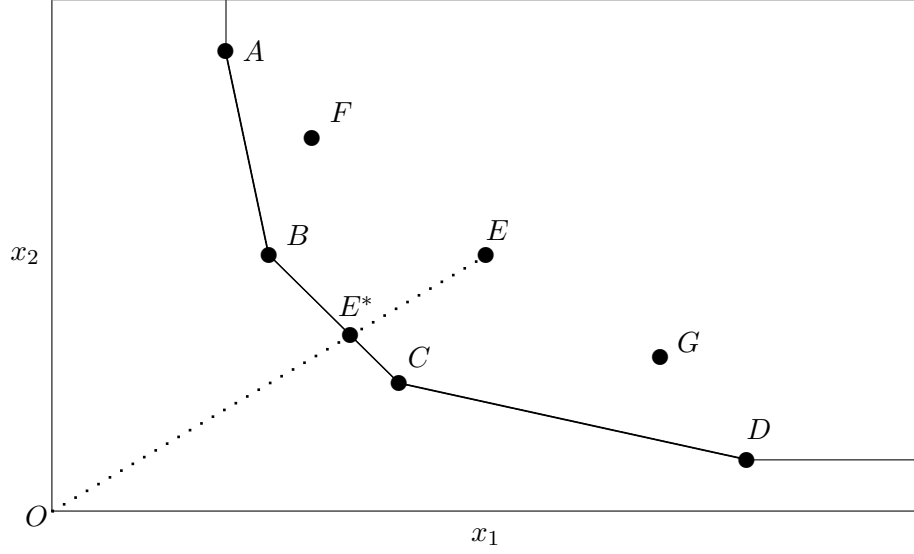
Eş-ürün grafiği üzerinde yer alan gözlemler diğerlerinden daha iyi performans göstermektedirler. Etkinlik ile ilgili yazında, eş-ürün eğrileri yerine *etkin sınır* (*efficient frontier*) terimi, aynı anlamda kullanılmaktadır. Bu bağlamda, metnin kalanında daha çok üretim ekonomisi alanında kullanılan eş-ürün eğrisi yerine etkinlik analizi yazınında olduğu gibi etkin sınır terimi kullanılmıştır.

Şekil 2.8, etkinlik açısından incelendiğinde, eş-ürün grafiği üzerinde yer alan A , B , C , ve D gözlemleri ile geri kalan E , F ve G gözlemleri iki ayrı kümeye bölünebilir. Etkin sınırın çizilmesine ilişkin yaklaşımın açıklanması, etkin sınır üzerinde yer alan gözlemlerin diğerlerinden neden daha iyi performans gösterdiğini de açıklar.

Sadece tek-çıkıtı ve iki-girdi durumu incelendiğinde, bir birim çıktı üretmek için gerekli olan girdi miktarları bulunabilir. Girdi-girdi düzleminde işaretlenen bu gözlemler için bulunacak ampirik etkin sınırın çizilmesi sürecinde aşağıdaki adımlar izlenir. Bölüm 3'de değinilecek olan *Veri Zarflama Analizi* (**D**ata **E**nvelopment **A**nalysis-DEA) adımı bu zarflama sürecinden almaktadır:

- (i) yatay eksene paralel olarak alınan bir doğru, ilk gözleme temas edene kadar yukarı kaydırılır,
- (ii) gözleme temas edildiğinde, gözlem pivot noktası olacak şekilde, doğrunun sol tarafı saat yönünde çevrilir,
- (iii) çevirme işlemi yeni bir gözleme temas edilene veya doğrunun sol tarafı düşey eksene paralel olana kadar sürer,
- (iv) doğrunun sol tarafı düşey eksene paralel olduğunda işlem sona erer, yoksa ikinci adıma dönülür.

Bu adımlar sayesinde, tüm gözlemlerin etkin sınır tarafından zarflanması sağlanmış olmaktadır, ve bu sınırın dışında hiç bir gözlem kalmamaktadır. Çıktının bir birim olarak sabit tutulduğu girdi-girdi düzleminde, orijine en yakın nokta en az girdi kullanarak bir birimlik çıktıyı



Şekil 2.9: Etkin Sınır

üretme başarısını göstermiştir. Bu çerçevede, etkin sınır olarak tanımlanan zarf, görel olarak etkinlerin geometrik yeridir. Zarfın içinde kalan tüm gözlemler, zarf üzerinde bulunan gözlemlerin doğrusal kombinasyonlarıyla yaratılabilecek hipotetik gözlemlerden daha düşük performans göstermiştir olacaktır.

§2.5 kapsamında ayrıntılı olarak verilen, Farrell [73] tarafından tanımlandığı şekliyle, toplam etkinlik ölçüm yaklaşımı, etkin sınıra referans verilerek yapılabilir. Unutulmaması gereken nokta, Farrell'in toplam etkinlik tanımında ölçeğe göre sabit getiri (CRS) varsayımının yapılmış olmasıdır.

Şekil 2.9, etkin sınır üzerinde yer alan A, B, C ve D gözlemleri ile zarf içerisinde bulunan E, F ve G gözlemlerinin yerlerini göstermektedir. Etkin sınır üzerinde yer alan gözlemler, Farrell'in tanımlamaları çerçevesinde, aynı zamanda üretim sınırı üzerinde yer alan gözlemlerdir. Ölçeğe göre sabit getiri varsayımı kabul edildiğinde, üretim sınırı üzerindeki noktaların toplam etkin oldukları hatırlanmalıdır. Bu bağlamda, etkin sınır üzerinde bulunan gözlemler, ölçeğe göre sabit getiri varsayımı altında,

toplam etkindirler. Farrell'in etkinlik ölçüm yaklaşımı kullanılarak, toplam etkinlikleri tam olmayan gözlemlerin etkinsizliklerinin değeri saptanabilir. Bilindiği üzere, etkinlik skorları 0.0 ve 1.0 aralığındadır. Zarf içerisinde bulunan E gözlemi, E_{x_1} ve E_{x_2} girdi bileşimini seçerek üretim yapmıştır. Bu üretim karışımına sahip bir başka gözlem bulunmasa da, B ve C gözlemlerinin etkin sınır üzerinde bulunan bir doğrusal kombinasyonu olan ve E 'nin üretim karışımının aynısını kullanan hipotetik bir E^* tanımlanabilir. E^* etkin sınır üzerinde olduğu için toplam etkindir ve toplam etkin olmayan E için bir rol modelidir. Farrell'in etkinlik ölçüm yöntemi, E gözleminin toplam etkinlik skorunu

$$OE^*/OE$$

oranı olarak tanımlamaktadır. OE^* uzunluğunun, OE uzunluğundan küçük olması sebebiyle, toplam etkinlik skorunu veren oran 1.0 değerinden küçüktür. Diğer bir deyişle, E tam toplam etkin değildir. Girdi bileşimi değiştirilmeden -yani, OE^* sabit tutularak, \vec{OE} ışını üzerinde yer alan ve E 'den daha içeride bulunan gözlemler için etkinlik incelendiğinde, payın sabit kaldığını ve paydanın, yani gözlemlerin orijine olan uzaklıklarının, artığı görülür. Bu sonuçta, beklendiği üzere, etkin sınırdan uzaklaştıkça, toplam etkinlik skorunun giderek düşmekte olacağını gösterir. Bu etkinlik ölçüm yaklaşımının esas alınması sonucunda, etkin sınır üzerinde bulunan tüm gözlemlerin toplam etkinlik skorları beklendiği gibi 1.0 bulunmaktadır. Farrell'in ölçüm sisteminin özünü oluşturan yaklaşım radyal uzaklıklara dayanmaktadır. Radyal uzaklıklara alternatif olan yöntemlere ileride kısaca değinilecektir.

Yukarıda verilen açıklamalarda bir eksiklik olduğu görülmektedir. Şekil 2.9 dikkatli incelendiğinde, A gözleminin yukarısında ve D gözleminin sağında, etkin sınır üzerinde bulunan noktalar incelendiğinde bu eksiklik açıkça ortaya çıkar:

- (i) Etkin sınır üzerinde yer alan gözlemler, ölçeğe göre sabit getiri varsayımı kabul edildiğinde, tam toplam etkin olarak değerlendirilirler.
- (ii) A gözleminin üzerinde yer alan ve etkin sınır üzerinde bulunan gözlemler, A gözlemi kadar x_1 girdisinden kullanmaktadır. Fakat, bu gözlemler, A gözleminin kullandığından daha fazla x_2 girdisi kullanarak, ancak A kadar üretmektedirler, ve kaynak israfında buldukları için tam toplam etkin değildir.
- (iii) D gözleminin sağında yer alan ve etkin sınır üzerinde bulunan göz-

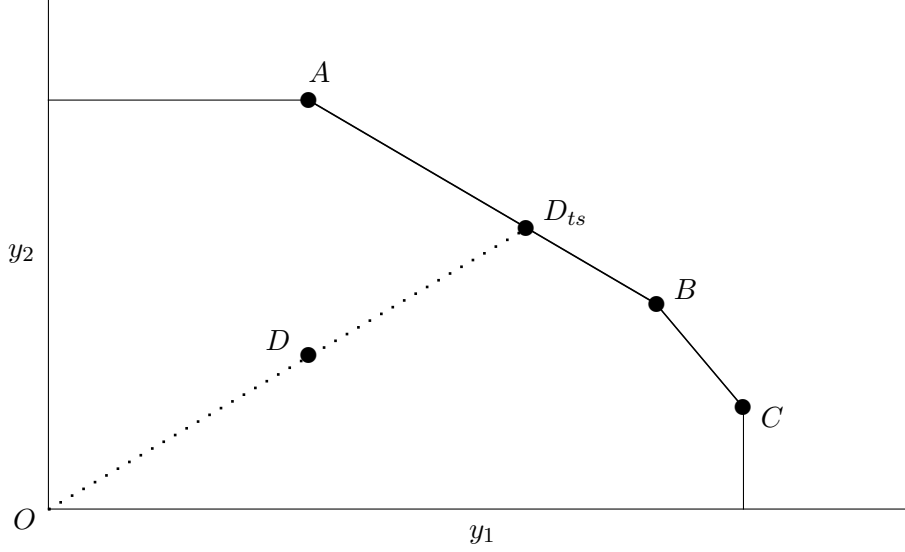
lemler, D gözlemi kadar x_2 girdisinden kullanmaktadır. Fakat, bu gözlemler, D gözleminin kullandığından daha fazla x_1 girdisi kullanılarak, ancak D kadar üretmektedir, ve kaynak israfında buldukları için tam toplam etkin değildir.

Bu sorunun belirlenmesine ve çözecek önlemlerin alınmasına Charnes, Cooper, ve Rhodes'un [41] çalışmasında değinilmiştir. Bu çalışmada tanıtılan *Arşimedgil olmayan büyüklüklerin* (non-Archimedean infinitesimal) sürece katılmasına ilişkin ayrıntılı bilgi Bölüm 3 kapsamında verilmiştir.

Bu noktaya kadar yapılan açıklamalar girdi yönelimi varsayımı altında yapılmıştır. Diğer bir deyişle, etkin olmayan karar birimlerinin etkin sınıra çekilebilmesi için, çıktı miktarları sabit tutularak, girdi faktörlerinde azaltma yapılmaya çalışılmıştır. Girdi yönelimli değerlendirme, daha önce §2.5 kapsamında incelenmiş ve *girdiye yönelik etkinlik* (input oriented efficiency) olarak adlandırılmıştır. Benzer bir süreç, girdileri sabit tutarak, çıktı miktarlarını artırmaya yönelik olarak tasarlanabilir. Bu tip bir analiz, *çıkta yönelimli* veya *çıkta yönelik etkinlik* (output oriented efficiency) değerlendirmesi olarak adlandırılmaktadır. Girdiye yönelik yapılan etkinlik incelemesi, tek-girdi faktörü ve iki-çıkta faktörünün bulunduğu hipotetik bir üretim süreci için, çıkta yönelik olarak yapılacaktır. Bu süreçte incelenen tüm karar birimlerinin kullandıkları girdi faktörü miktarı aynı, fakat ürettikleri çıktı miktarları farklıdır. İlgili gözlemler ve çıkta yönelik etkin sınır için Şekil 2.10 incelenebilir.

Şekil 2.10, etkin sınırı tanımlayan A , B ve C karar birimleri ile zarfın içinde kalan ve etkin olmayan D karar birimini göstermektedir. D karar birimi üretim sürecine konu olan tek girdi faktöründen diğer karar birimleri kadar tüketmiştir. Şekilde gösterilen D_{ts} hipotetik karar birimi, A ve B karar birimlerinin bir doğrusal kombinasyonu sonucunda oluşturulmuştur. Karar birimi D_{ts} 'in özelliği, D karar birimi ile aynı çıktı karışımına, diğer bir deyişle aynı y_2/y_1 oranına, sahip olmasına rağmen, her iki tür çıktıdan D 'ye kıyasla daha fazla üretmiştir. Sonuç olarak D 'nin A ve B 'nin bir doğrusal kombinasyonu ile kıyaslandığında kaynaklarını israf ettiği kolaylıkla söylenebilir. Farrell'in tanımlamaları çerçevesinde, D_{ts} , ölçeğe göre sabit getiri varsayımı altında hem tam teknik etkin (indis t , teknik etkinlik göstermektedir), hem de tam ölçek etkindir (indis s ölçek etkinliği göstermektedir).

Çıkta yönelik olan açıklamalara ilişkin olarak, girdiye yönelik analizde sorulan soruları ve yapılan itirazları yinelemek mümkündür. A karar



Şekil 2.10: Çıktıya Yönelik Etkin Sınır

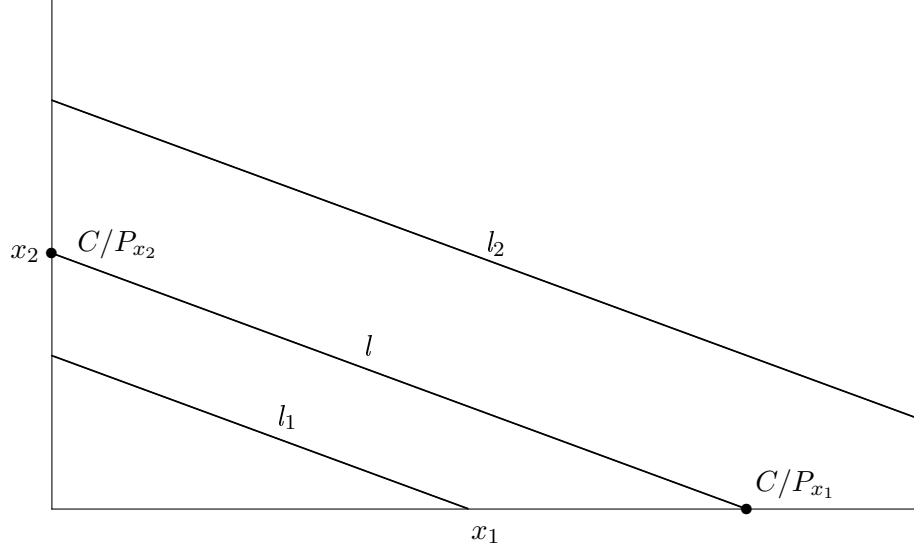
biriminin solunda ve C karar biriminin altında kalan karar birimleri, etkin sınır üzerinde olmalarına karşın, A 'ya kıyasla y_1 çıktısından, C 'ye kıyasla y_2 çıktısından daha az üretmektedirler. Bu noktaya ilişkin ayrıntılı açıklama, ileride Bölüm 3 kapsamında verilecektir.

2.7 Tahsis Etkinliği

Üretim sürecinde girdi faktör maliyetlerinin bilindiği ve önem taşıdığı durumda, teknik ve ölçek etkinliğine ek olarak, *fiyat etkinliği*nin veya aynı anlamda kullanılan *tahsis etkinliği*nin incelenmesi gerekir.

Karar biriminin, minimum maliyetle üretim yapmasını sağlayan optimal faktör bileşimiyle mevcut durumunu kıyaslayan tahsis etkinliğinin açıklanmasında *eş-ürün eğrilerinden* (isoquant) faydalanılacaktır.

Bütçesi sınırlı olan ve sadece iki girdi faktörü kullanan bir karar biriminin, bu sınırlı bütçenin tamamı ile girdi faktörlerinden ne miktarda tedarik edebileceğini veren ilişki *eş-maliyet doğrusu* (isocost line) ile gös-

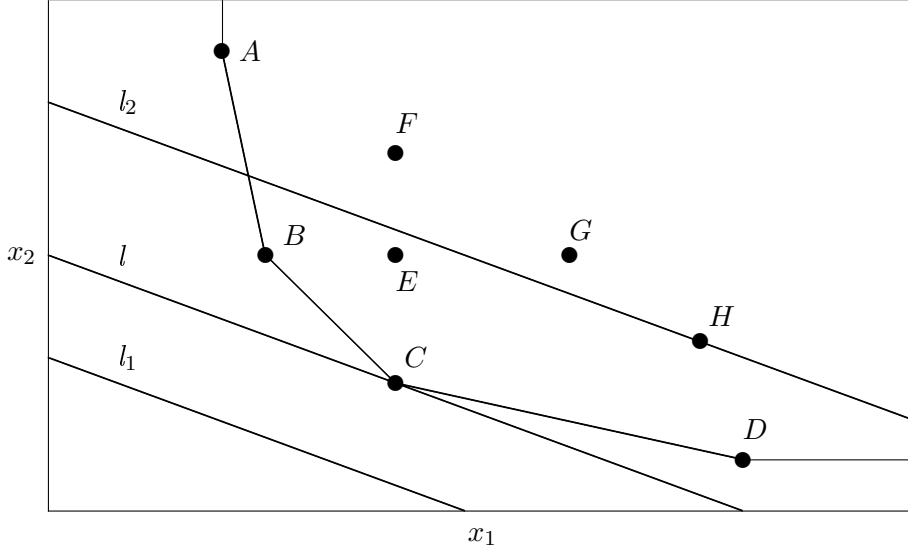


Şekil 2.11: Eş-Maliyet Doğrusu

terilmektedir. Hipotetik bir karar biriminin bütçesi C , ve veri olan x_1 ve x_2 girdi faktörlerinin fiyatları, sırasıyla, P_{x_1} ve P_{x_2} ile gösterilsin. Bu notasyon çerçevesinde, karar birimi tüm bütçesini x_1 faktörü alımına ayırırsa C/P_{x_1} miktarında x_1 faktörü, eğer tüm bütçesini x_2 faktörü alımına ayırırsa C/P_{x_2} kadar x_2 faktörü, temin edecektir. Bu iki ekstrem arasında sonsuz doğrusal kombinasyon bulunmaktadır. Bu kombinasyonların geometrik yeri, uç noktaları $(C/P_{x_1}, 0)$ ve $(0, C/P_{x_2})$ olan doğru parçasıdır. Karar biriminin farklı bütçe değerleri için elde edeceği geometrik yerler, bu doğru parçasına paralel doğru parçalarıdır. Şekil 2.11, bu durumu göstermektedir.

Faktör fiyatları sabitken, karar biriminin bütçesi değiştiği zaman eş-maliyet doğrusu değişiklik öncesindeki eş-maliyet doğrusuna paralel bir şekilde kayar. Doğrunun kayma yönü, bütçe artıktıkça sağa, azaldıkça sola doğrudur. Şekil 2.11 bu durumu göstermektedir. $C_1 < C$, bütçe azalışına karşılık gelen doğru parçası l_1 , $C_2 > C$ bütçe artışına karşılık gelen ise l_2 olarak adlandırılmıştır.

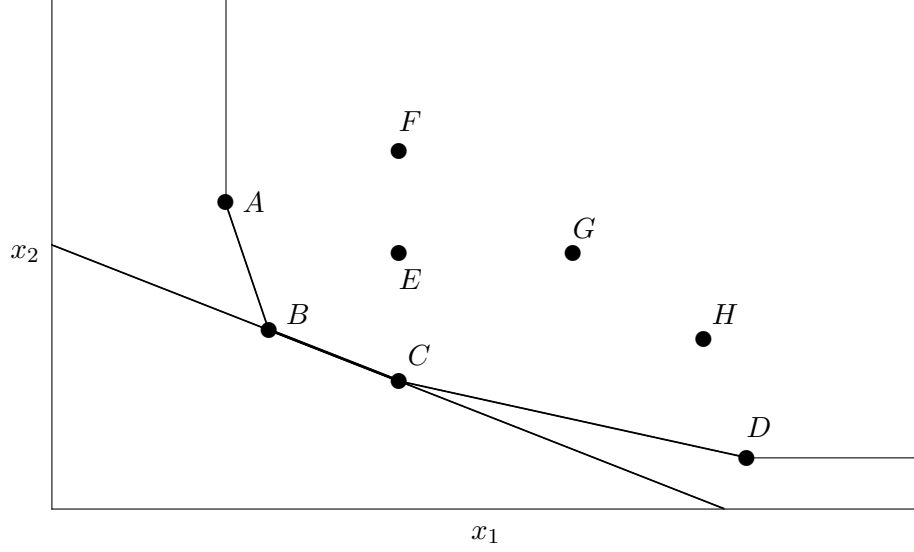
Bir karar birimi için, girdi faktör maliyetleri dikkate alındığında, sabit



Şekil 2.12: Optimum Faktör Bileşimi

bir çıktı düzeyini yakalayacak en düşük maliyetli girdi karışımı (*optimum faktör bileşimi*) eş-ürün eğrisi ve eş-maliyet doğrusu yardımıyla bulunur. Bununla ilgili olarak, Şekil 2.8 ve 2.11'in birleşimi Şekil 2.12 olarak gösterilmiştir.

Bu şekilde, l_1 doğru parçası ile gösterilen eş-maliyet doğrusu ($C_1 < C$) ve eş-ürün eğrisi arasında ortak küme olmadığı için, C_1 bütçe kısıtıyla istenen çıktı düzeyine ulaşamayacağı görülmektedir. Öte yandan, l_2 doğru parçası $C_2 > C$ bütçesine karşılık gelmekte ve eş-ürün eğrisinin sınırlandırdığı alanla arasında sonsuz elemanlı ortak küme bulunmaktadır. Bu kümenin elemanlarına örnek olarak H gösterilebilir. Ancak, bu kümenin tanımladığı üretim karışımlarından birinin gerçekleştirilmesi halinde, mevcut bütçe israf edilmiş olacaktır. Çünkü, belirlenen çıktı düzeyine daha düşük bütçe ile ulaşma imkanı vardır ve bu bütçeye karşılık gelen eş-maliyet doğrusu, eş-ürün eğrisinin sınırlandırdığı alana teğet olan l doğru parçasıdır. Verilen şekilde ortak küme, tek elemanlı bir kümedir, ve elemanı C 'dir. Bu açıklamalar sonucunda, C gözleminin belirlenen sabit çıktı düzeyini verebilecek en düşük maliyetli üretim karışımı olduğu söylenir.



Şekil 2.13: Sonsuz Elemanlı Optimum Faktör Bileşim Kümesi

Optimum faktör bileşimini veren kümenin eleman sayısı, eğer eş-ürün eğrisi ve eş-maliyet doğrusu belirli bir aralıkta çakışırsa, sonsuz olur. Şekil 2.13 buna ilişkin bir durumu göstermektedir. B ve C üretim karışımlarının sonsuz tane doğrusal kombinasyonu türetilirse, B ve C arasındaki doğru parçasıyla tanımlanmış olan küme elde edilir. Bu kümenin tüm elemanları girdi faktörlerinden farklı miktarda, fakat optimum maliyetle, kullanarak miktarı sabitlenmiş olan çıktıyı üretebilmektedir.

Tahsis etkinliği, Şekil 2.14 yardımıyla açıklanacaktır. A , B ve C karar birimleri etkin sınırı tanımlamaktadır; D karar birimi zarfın içinde kalmıştır. Dolayısıyla, A , B ve C , ölçeğe göre sabit getiri varsayımı altında, görelî tam toplam etkinken, $\tau_{A,B,C} = 1.0$, D etkinsizdir, $\tau_D < 1.0$. D karar biriminin girdi karışımını değiştirmeden aynı şartlar altında, görelî tam toplam etkin olabilmesi için, x_1/x_2 oranının değişmeden orijini gösteren O 'ya doğru yaklaşması gerekmektedir. Mevcut etkin sınır tanımlamasının değişmemek kaydıyla, D 'nin görelî tam toplam etkin olması için bulunması gereken koordinatlar D_{ts} olarak gösterilmiştir. Bu gösterimde indis t teknik etkinliği, ve indis s ölçek etkinliği göstermektedir.

Eğer karar birimi D , D_{ts} noktasına ulaşırsa, teknik ve ölçek etkin olur; fakat, girdi faktör fiyatları çerçevesinde oluşturulan ve mümkün en küçük bütçeyi gösteren l üzerinde bulunmadığı, ve daha büyük bir bütçe gerektiren konumda olduğu için, D_{ts} noktasında bulursa dahi tahsis etkin olmayacaktır. D karar biriminin mevcut girdi karışımıyla ve bütçe kısıtıyla, idealde olması gereken yer, D_{tsa} noktasının bulunduğu koordinatlardır. Fakat, D_{tsa} noktası mümkün olmayan bir üretim karışımını göstermektedir. Dolayısıyla, etkin sınır ve eş-maliyet doğrusunun ortak kümesinde yer almayan D karar birimi için bir rol modeli olan D_{tsa} mümkün olmayan bir gözlemi temsil etmektedir. Hipotetik D_{tsa} noktasından, D tahsis etkinliğinin ölçülmesinde faydalanmak mümkündür. Farrell tarafından tanımlandığı şekliyle tahsis etkinliği

$$OD_{tsa}/OD_{ts}$$

olarak ifade edilir. Daha önceki açıklamalar çerçevesinde, D karar biriminin toplam etkinliği

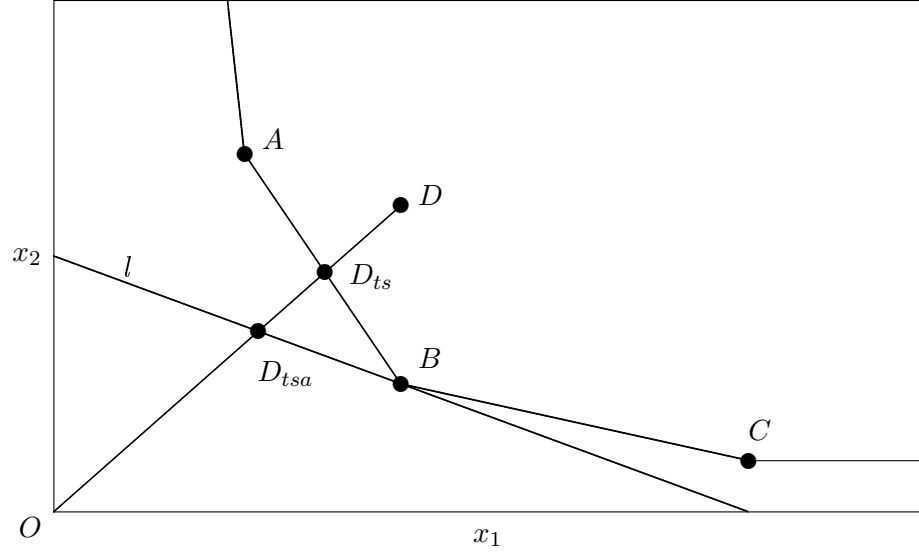
$$OD_{ts}/OD$$

olarak yazılır. Fiyat ve toplam etkinliğe ilişkin oranlar yardımıyla bulunan *iktisadi etkinlik* (*economic efficiency*) tanımı, yine Farrell tarafından yapılmıştır:

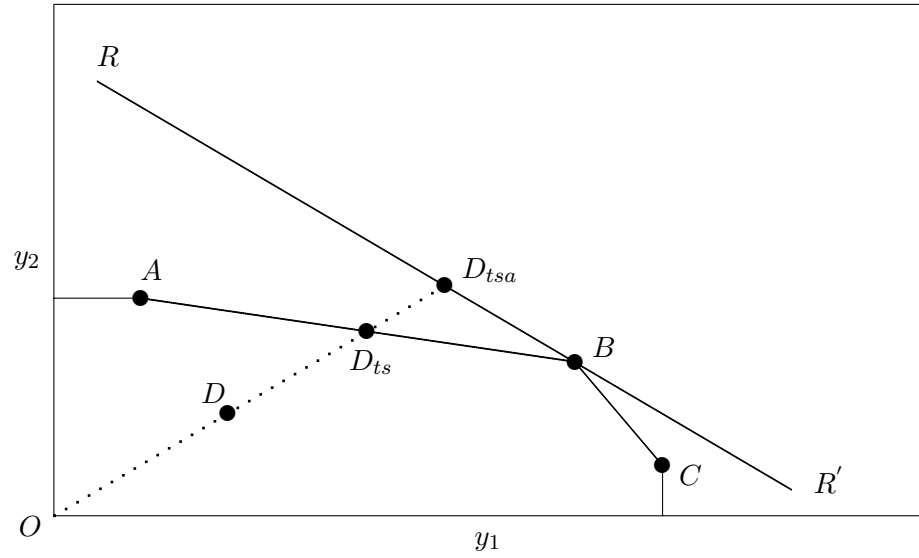
$$OD_{tsa}/OD_{ts} \times OD_{ts}/OD = OD_{tsa}/OD.$$

Şekilde verilen karar birimlerinden sadece B , görelî tam iktisadi etkindir. Şekildeki diğer iki karar birimi olan A ve C ise görelî tam teknik ve ölçek etkin olmalarına karşın, optimum girdi bileşimiyle üretim yapmadıkları için tahsis etkinlikleri tam değildir. D karar birimi mevcut girdi karışımıyla D_{tsa} noktasına ulaşırsa, ki teorik olarak etkin sınırı aşması mümkün değildir, teknik ve ölçek etkinliğinin yanında, eş-maliyet doğrusu üzerinde yer alarak mümkün en düşük bütçe ile üretim yapabildiği için tahsis etkinliği de tam olacaktır. D karar birimi doğru girdi karışımıyla üretim yapmadığı için tam tahsis etkinliğini mevcut girdi karışımıyla yakalama imkanı yoktur.

Bu noktaya kadar tahsis etkinliği ile ilgili açıklamaların tümü girdiye yöneliktir. Girdiye yönelik yapılan iktisadi etkinlik incelemesi, tek-girdi faktörü ve iki-çıkıtı faktörünün bulunduğu hipotetik bir üretim süreci için, çıktıya yönelik olarak yapılacaktır. Bu süreçte incelenen tüm karar birimlerinin kullandıkları girdi faktörü miktarı aynı, fakat ürettikleri çıktı miktarları farklıdır. İlgili gözlemler ve çıktıya yönelik etkin sınır için Şekil 2.15 incelenebilir.



Şekil 2.14: Fiyat Etkinliği



Şekil 2.15: Çıktıya Yönelik Fiyat Etkinliği

Şekil 2.15, etkin sınırı tanımlayan A , B ve C karar birimleri ile zarfın içinde kalan ve etkin olmayan D karar birimini göstermektedir. RR' ile gösterilen doğru, belirli bir hasılat değerine ulaşmak için gerekli olan y_1 ve y_2 çıktı miktarlarının geometrik yeridir. Bu doğru *eş-hasılat doğrusu* olarak adlandırılır (isorevenue line).

D karar biriminin toplam etkinliğine yönelik olarak daha önce verilen (s.26) yorumlar burada da geçerlidir. Şekil 2.15, toplam etkinliğe ek olarak, tahsis etkinliği ile ilgili yorum yapma imkanı vermektedir. Böylece, teknik ve ölçek etkinliğini içeren toplam etkinlik, tahsis etkinliği bilgisiyle birlikte iktisadi etkinliği oluşturacaktır.

D karar birimi için,

$$OD/OD_{ts}$$

toplam etkinliği verecektir. Farrell'in tanımı çerçevesinde, tahsis etkinliği ise

$$OD_{ts}/OD_{tsa}$$

yardımıyla bulunur. Bu iki etkinlik tanımı çerçevesinde, iktisadi etkinlik

$$OD/OD_{ts} \times OD_{ts}/OD_{tsa} = OD/OD_{tsa}$$

olarak yazılır.

Girdi ve çıktıya yönelik olarak yapılan etkinlik değerlendirmeleri etkin sınırın tanımlanmasında aynı karar birimlerini kullanmaktadır. Ölçeğe göre sabit getiri varsayımı altında, etkin olmayan karar birimlerinin de etkinlik skorları her iki yaklaşımda aynıdır. Ancak, ölçeğe göre değişken getiri varsayımı kabul edildiğinde, etkin olmayan karar birimlerinin etkinlik skorları, girdiye yönelik ve çıktıya yönelik olarak yapılan analizlerde, farklı sonuç vermektedir [52].

2.8 Örnekler

Bu kısımda, Bölüm 2 kapsamında açıklanan kavramlara ilişkin örnekler verilmiştir. İlk olarak, tek-girdi tek-çıkıtı durumu ele alınmıştır. Girdiye ve çıktıya yönelik olarak ayrı ayrı teknik ve ölçek etkinlik skorları, ölçeğe göre değişken getiri, ölçeğe göre azalan getiri, ölçeğe göre artan getiri ve ölçeğe göre sabit getiri varsayımı altında hesaplanmıştır. Bunun ardından, tahsis etkinliğinin girdiye yönelik olarak hesaplanmasına

DMU	A	B	C	D	E	F
x	3.5	5.0	6.0	6.0	9.0	5.0
y	1.5	6.0	8.0	6.0	9.0	1.5
$\eta = y/x$	0.4286	1.2000	1.3333	1.0000	1.0000	0.3000

Tablo 2.2: Girdi-Çıktı Miktarları (Örnek I)

ilişkin bir örnek verilmiştir.

2.8.1 Örnek I: Toplam Etkinlik

Bir üretim sürecinde tek bir girdi, x , kullanılmakta ve tek bir çıktı, y , üretilmektedir. Gözlenen karar birimi sayısı 6'dır, $\{A, B, C, D, E, F\}$. Karar birimlerinin kullandıkları girdi ve ürettikleri çıktı miktarı Tablo 2.2 olarak verilmiştir.

Tabloda verilen x ve y değerlerinin grafiği Şekil 2.16 olarak verilmiştir. Şekilde, ayrıca, $\{A, B, C, E\}$ tarafından ölçeğe göre değişken getiri varsayımı altında tanımlanan üretim sınırı görülmektedir. Tablonun son satırında, $\eta = y/x$ oranıyla hesaplanmış verimlilik değerleri bulunmaktadır. Bunlar arasında en yüksek değer C karar birimine aittir, $\eta_C=1.3333$. C karar biriminin sahip olduğu ölçek büyüklüğü en verimli ölçek büyüklüğünü (MPSS) göstermektedir.

\overrightarrow{OC} , $y = 1.3333x$, ölçeğe göre sabit getiri varsayımı altında üretim sınırını göstermektedir. Bu varsayımın geçerli olması durumunda, C karar biriminin toplam etkinlik skoru 1.0'dir. $\{A, B, E\}$ karar birimlerinin toplam etkinlik skorları ise, sırasıyla

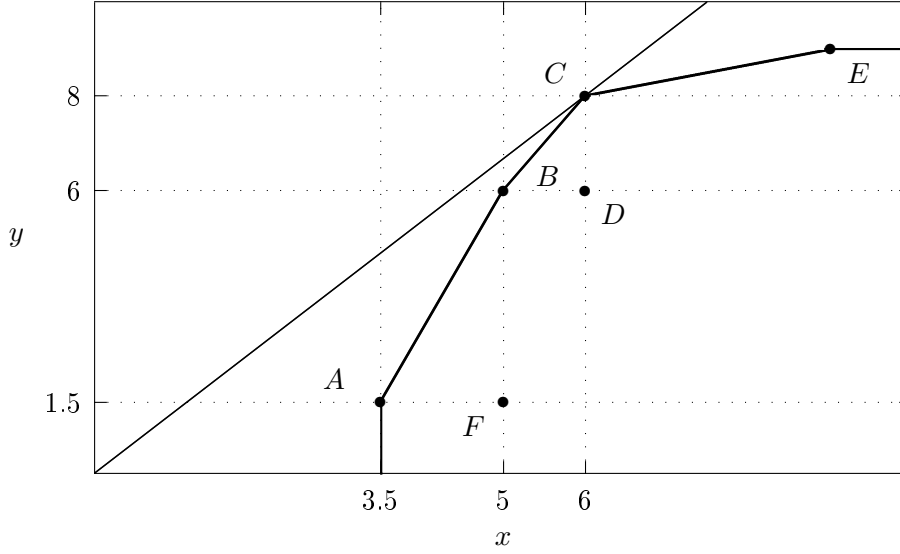
$$\eta_A/\eta_C = 0.4286/1.3333 = 0.3215$$

$$\eta_B/\eta_C = 1.2000/1.3333 = 0.9000$$

$$\eta_E/\eta_C = 1.0000/1.3333 = 0.7500$$

olarak bulunur. Bu karar birimleri, ölçeğe göre değişken getiri varsayımı altında, üretim sınırı üzerinde olmaları sebebiyle, tam teknik etkindir. Toplam etkinliğin, teknik etkinlik ve ölçek etkinliği skorlarının çarpımına eşit olması nedeniyle, toplam etkinlik skorları ve ölçek etkinlik skorları aynıdır.

Dikkat edileceği üzere A, B, C, E karar birimleri için yapılan incele-



Şekil 2.16: Üretim Sınırı (Örnek I)

mede girdiye ve çıktıya yönelik olarak herhangi bir ayırım yapılmamıştır. Çünkü, toplam etkinlik skorları ölçeğe göre sabit getiri varsayımı altında hesaplanır, ve yönelimden bağımsızdır. Teknik etkinlik skoru ise ölçeğe göre değişken getiri varsayımı altında hesaplanır, ve yönelim belirleyicidir. Ancak, incelenen karar birimleri üretim sınırı üzerinde oldukları için teknik etkinlikleri yönelimden bağımsız olarak 1.0 bulunmaktadır. Dolayısıyla, yönelimden bağımsız olan toplam ve teknik etkinlik skorları yardımıyla hesaplanan ölçek etkinliği de yönelimden bağımsız olarak bulunmaktadır.

F ve D karar birimleri için girdiye veya çıktıya göre hesaplanacak olan etkinlik ölçümleri farklı olacaktır. Nitekim, F ve D 'nin toplam etkinlik skorları, sırasıyla,

$$\eta_F/\eta_C = 0.3000/1.3333 = 0.2250$$

$$\eta_D/\eta_C = 1.0000/1.3333 = 0.7500$$

olarak hesaplanır. F ve D karar birimlerinin teknik etkinlik skorları, girdiye yönelik olarak hesaplandığında, rol modelleri olan A ve B 'ye referans verilmesi gerekir. Bunun sonucunda,

DMU	η	τ_{ts}	τ_t	τ_s
<i>A</i>	0.43	0.32	1.00	0.32
<i>B</i>	1.20	0.90	1.00	0.90
<i>C</i>	1.33	1.00	1.00	1.00
<i>D_I</i>	1.00	0.75	0.83	0.90
<i>D_O</i>	1.00	0.75	0.75	1.00
<i>E</i>	1.00	0.75	1.00	0.75
<i>F_I</i>	0.30	0.23	0.70	0.32
<i>F_O</i>	0.30	0.23	0.25	0.90

Tablo 2.3: Etkinlik Skorları (Örnek I)

$$\eta_F/\eta_A = 0.3000/0.4286 = 0.7000$$

$$\eta_D/\eta_B = 1.0000/1.2000 = 0.8333$$

bulunur. Aynı hesaplamalar çıktıya yönelik olarak yapıldığında, *F* ve *D* karar birimlerinin rol modelleri olan, sırasıyla, *B* ve *C*'ye referans verilir ve teknik etkinlik skorları,

$$\eta_F/\eta_B = 0.3000/1.2000 = 0.2500$$

$$\eta_D/\eta_C = 1.0000/1.3333 = 0.7500$$

olarak hesaplanır. Özellikle, *F* karar birimi için girdiye ve çıktıya yönelik olarak bulunan teknik etkinlik skorları, $\tau_{F,I}=0.70$ ve $\tau_{F,O}=0.25$, arasında büyük fark olduğu görülmektedir.

F ve *D* karar birimlerinin, girdiye yönelik ölçek etkinlikleri, sırasıyla,

$$\eta_A/\eta_C = 0.4286/1.3333 = 0.3215$$

$$\eta_B/\eta_C = 1.2000/1.3333 = 0.9000$$

ve, çıktıya yönelik ölçek etkinlikleri, sırasıyla,

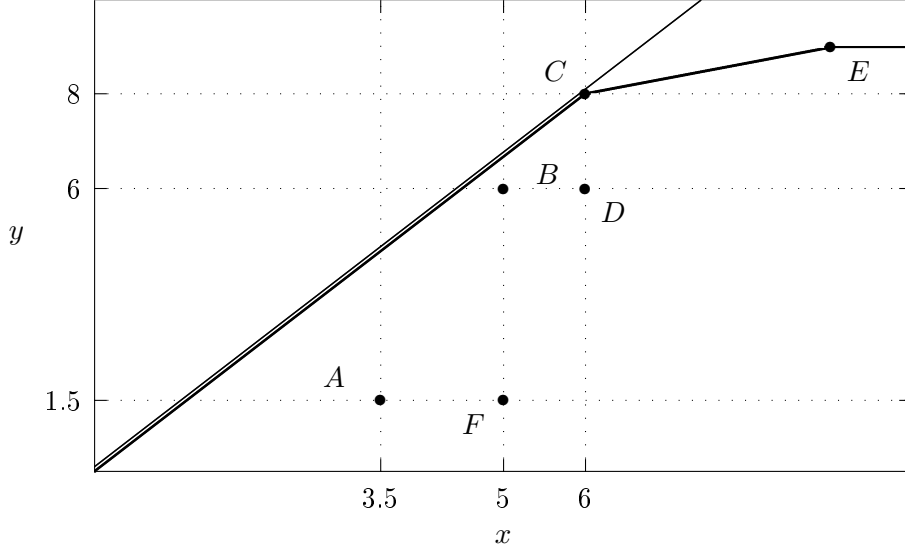
$$\eta_B/\eta_C = 1.2000/1.3333 = 0.9000$$

$$\eta_C/\eta_C = 1.3333/1.3333 = 1.0000$$

olarak hesaplanır.

Buraya kadar olan sonuçların bir özeti Tablo 2.3 olarak verilmiştir. Kullanılan notasyonda, τ etkinliğe, *t* indisi teknik etkinliğe, *s* indisi ölçek etkinliğine, *ts* indisi toplam etkinliğe, *I* indisi girdiye yönelik etkinlik hesaplamasına, *O* indisi çıktıya yönelik etkinlik hesaplamasına karşılık gelmektedir.

Ölçeğe göre artan getiri (IRS) ve ölçeğe göre azalan getiri (DRS)

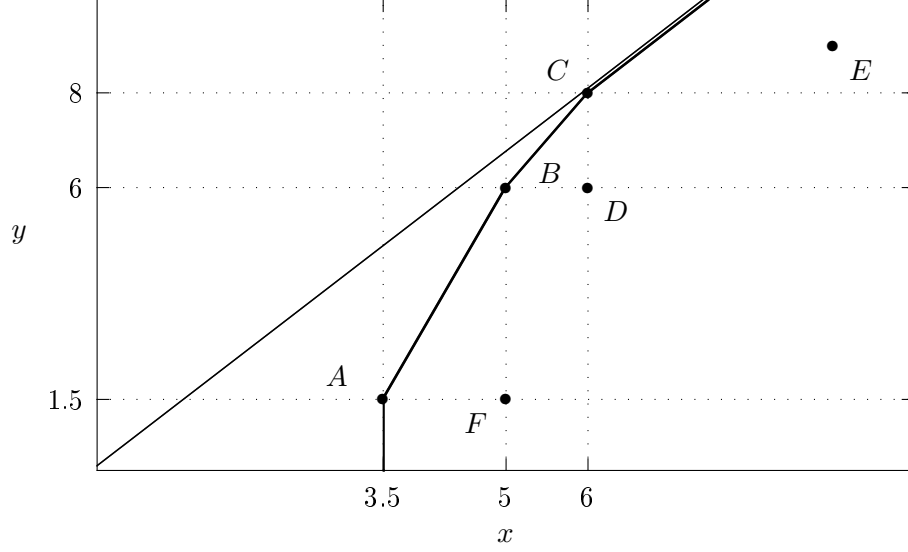


Şekil 2.17: DRS (Örnek I)

varsayımları altında, bazı karar birimlerinin etkinlik skorları değişecektir. Bunun incelemesini yapmak üzere, Şekil 2.16 ölçeğe göre azalan getiri durumunda Şekil 2.17 ve ölçeğe göre artan getiri durumunda Şekil 2.18 olarak tekrar çizilmiştir.

Şekil 2.17 ölçeğe göre azalan getiri durumunu göstermektedir. Bu şartlar altında etkinlik skorları değişecek olan karar birimleri A , B , D , F dir. Bu karar birimlerinin toplam etkinlik ve teknik etkinlik skorları aynı çıkmaktadır. Dolayısıyla, ölçek etkinlik skorlarınının 1.0 olduğu sonucuna varılır. Ayrıca, etkinlik skorları girdiye veya çıktıya yönelik olarak hesaplanmalarına bağlı olmaksızın aynı bulunmuştur. Sonuçlar için Tablo 2.4 incelenebilir.

Şekil 2.18 ölçeğe göre artan getiri durumunu göstermektedir. Bu şartlar altında etkinlik skorları değişecek olan karar birimi sadece E 'dir. Bu karar biriminin toplam etkinlik ve teknik etkinlik skorları aynıdır. Dolayısıyla, ölçek etkinlik skoru 1.0'dir. Ayrıca, etkinlik skorları girdiye veya çıktıya yönelik olarak hesaplanmalarına bağlı olmaksızın aynıdır. Sonuçlar için Tablo 2.5 incelenebilir.



Şekil 2.18: IRS (Örnek I)

DMU	η	τ_{ts}	τ_t	τ_s
A	0.43	0.321	0.321	1.0
B	1.20	0.900	0.900	1.0
D_I	1.00	0.750	0.750	1.0
D_O	1.00	0.750	0.750	1.0
F_I	0.30	0.225	0.225	1.0
F_O	0.30	0.225	0.225	1.0

Tablo 2.4: DRS Altında Etkinlik (Örnek I)

DMU	η	τ_{ts}	τ_t	τ_s
E_I	1.00	0.750	0.750	1.0
E_O	1.00	0.750	0.750	1.0

Tablo 2.5: IRS Altında Etkinlik (Örnek I)

DMU	x_1	x_2	y	\bar{x}_1	\bar{x}_2
<i>A</i>	20	90	10	2.0	9.0
<i>B</i>	25	50	10	2.5	5.0
<i>C</i>	32	20	8	4.0	2.5
<i>D</i>	40	5	5	8.0	1.0
<i>E</i>	28	35	7	4.0	5.0
<i>F</i>	32	56	8	4.0	7.0
<i>G</i>	66	55	11	6.0	5.0
<i>H</i>	75	33	10	7.5	3.3

Tablo 2.6: Örnek II: Girdi-Çıktı Miktarları

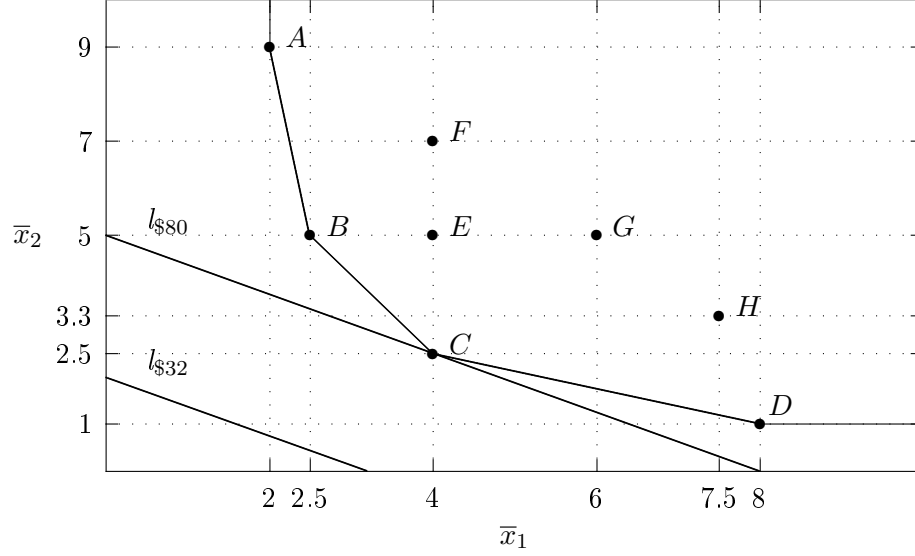
2.8.2 Örnek II: Tahsis Etkinliği

Bir üretim sürecinde y çıktısı iki tür girdi, x_1 ve x_2 , kullanılarak üretilmektedir. Bu üretim süreci ölçeğe göre sabit getiri özelliği göstermektedir. x_1 ve x_2 girdi birim maliyetleri, sırayla, \$10 ve \$16'dır. y ürününün üretimini gerçekleştiren 8 farklı karar birimi, $\{A, B, \dots, H\}$ bulunmaktadır. Bu karar birimlerinin kullandıkları x_1 ve x_2 miktarları ile ürettikleri y miktarları Tablo 2.6'da verilmiştir.

Gözlemler için ölçeğe göre sabit getiri varsayımı kabul edilmiştir. Bu varsayım altında, tek bir birim çıktı üretmek için gerekli olan girdi miktarları, her karar birimi için, $\bar{x}_1 = x_1/y$ ve $\bar{x}_2 = x_2/y$ oranlarından bulunur. Sonuçlar, Tablo 2.6, sütun 5 ve 6'da verilmiştir.

Eksenler olarak \bar{x}_1 ve \bar{x}_2 'nin tanımlandığı Şekil 2.19, bir birim çıktı üretmek için karar birimlerinin kullanmaları gereken girdi miktarını ve tüm karar birimlerini zarflayan etkin sınırı göstermektedir. Şekil 2.19, ayrıca, \$32'lık bir bütçe ile ne miktarda girdi temin edilebileceğinin geometrik yeri olan eş-maliyet doğrusunu göstermektedir.

Ancak, \$32'lık eş-maliyet doğrusu ve etkin sınırın kesiştiği bir nokta bulmak mümkün değildir. Bu durum mevcut bütçe doğrusu ile bir birim çıktı üretmenin mümkün olamayacağını göstermektedir. Bu nedenle bütçe miktarı artırılmış ve eş-maliyet doğrusu, $l_{\$32}$, etkin sınırın tanımladığı alana teğet olana kadar paralel biçimde kaydırılmıştır. Teğet olma durumunun gerçekleştiği anda bütçe büyüklüğü, $l_{\$80}$ doğrusunun gösterdiği \$80'dır. Daha önce açıklandığı üzere, bu nokta en düşük maliyetle



Şekil 2.19: Etkin Sınır ve Eş-Maliyet Doğrusu (Örnek II)

üretim yapılan ve dolayısıyla fiyat ve toplam etkin olan (iktisadi etkin) C karar birimidir.

Karar birimi E 'nin iktisadi etkinliğinin bulunabilmesi için bileşenleri olan toplam etkinlik ve tahsis etkinliğinin ayrı ayrı bilinmesi gerekir. Bu amaçla E 'nin etkinlik değerleri ölçülmeye çalışılmıştır.

Sırasıyla $(2.5, 5)$ ve $(4, 2.5)$ koordinatlarına sahip B ve C karar birimleri arasında olan ve etkin sınırın da bir parçasını temsil eden doğru parçasının üzerinde bulunduğu doğrunun tanımı:

$$\overline{BC} : y = -5/3x + 55/6.$$

E karar biriminin üzerinde olduğu ve O 'dan geçen doğrunun tanımı ise

$$\overline{OE} : y = 5/4x.$$

Bu iki doğrunun kesiştiği nokta, E_{ts} , E noktasıyla aynı üretim karışımını kullanan, ancak toplam etkin olan bir hipotetik karar birimini tanımlamaktadır. Bu noktanın koordinatları $(3.1428, 3.9286)$ olarak bulunur. OE_{ts} ve OE doğru parçalarının uzunlukları ise sırasıyla 5.031 ve 6.4'dür. Farrell'in etkinlik ölçüm yaklaşımı çerçevesinde, E 'nin toplam

DMU	x	y_1	y_2	\bar{y}_1	\bar{y}_2
A	20	20	85	1.00	4.25
B	5	30	15	6.00	3.00
C	20	140	20	7.00	1.00
D	35	70	70	2.00	2.00

Tablo 2.7: Girdi-Çıktı Miktarları (Örnek III)

etkinlik skoru OE_{ts}/OE yardımıyla, $\tau_{ts} = \%78.57$ olarak hesaplanır.

E karar biriminin tahsis etkinliğinin belirlenebilmesi için rol model olan ve eş-maliyet doğrusu üzerinde bulunup E ile aynı girdi karışımını kullanan E_{tsa} noktasının koordinatlarının bilinmesi gerekir. E_{tsa} hipotetik karar birimi, doğru denklemleri sırasıyla, $y = 5/4x$ ve $y = -5/8x + 5$ olan OE ve eş-maliyet doğrusunun kesiştiği yerdedir. Bu noktanın koordinatları $(8/3, 10/3)$ 'dür. Yine, Farrell'in ölçüm yaklaşımı kullanılır ve OE_{tsa}/OE_{ts} tahsis etkinliği tanımıyla $\tau_{tsa} = \%84.85$ bulunur.

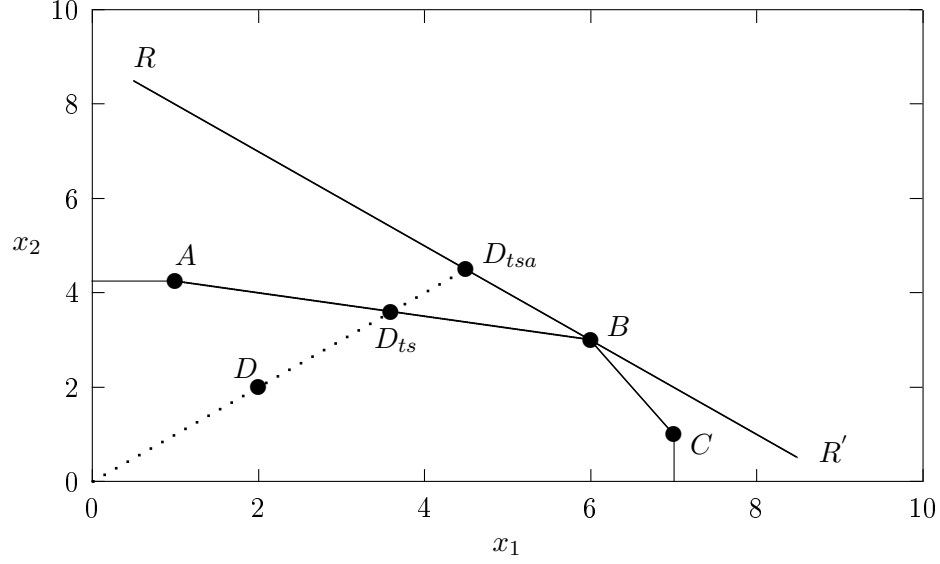
Tahsis etkinlik skoru olan 0.8485 ve toplam etkinlik skoru olan 0.7857 değerlerinin çarpımı sonusunda iktisadi etkinlik skoru olarak 0.6667 değerine ulaşılır. Bu değer aynı zamanda, OE_{tsa}/OE oranının değeridir.

2.8.3 Örnek III: Fiyat Etkinliği, Tek-Girdi İki-Çıktı

Bir üretim sürecinde y_1 ve y_2 çıktıları tek tür girdi, x , kullanılarak üretilmektedir. Bu üretim süreci ölçüğe göre sabit getiri özelliği göstermektedir. Her iki çıktı, y_1 ve y_2 , için birim fiyat \$16'dır. y_1 ve y_2 ürünlerinin üretimini gerçekleştiren 4 farklı karar birimi, $\{A, B, C, D\}$ bulunmaktadır. Bu karar birimlerinin ürettikleri y_1 ve y_2 miktarları ile kullandıkları girdi x miktarları Tablo 2.7 olarak verilmiştir.

Gözlemler için ölçüğe göre sabit getiri varsayımı kabul edilmiştir. Bu varsayım altında, bir birim x girdisi kullanarak üretilebilecek olan y_1 ve y_2 çıktı miktarı, her karar birimi için, $\bar{y}_1 = y_1/x$ ve $\bar{y}_2 = y_2/x$ oranlarından bulunur. Sonuçlar, Tablo 2.7, sütun 5 ve 6'da verilmiştir.

Eksenler olarak \bar{y}_1 ve \bar{y}_2 'nin tanımlandığı Şekil 2.20, bir birim girdi kullanarak karar birimlerinin ürettikleri çıktı miktarlarını ve tüm karar birimlerini zarflayan etkin sınırı göstermektedir. Şekil 2.20, ayrıca,



Şekil 2.20: Etkin Sınır ve Eş-Hasılat Doğrusu (Örnek III)

\$144'lık bir hasılatı verecek olan üretim miktarlarının geometrik yeri olan eş-hasılat doğrusunu göstermektedir.

\$144'ın üzerinde bir hasılatın gerçekleşmesi mümkün değildir. Çünkü bu durumda eş-hasılat doğrusu, \$144'a karşılık gelen hasılat doğrusunun sağında paralel olarak yer alır ve etkin sınır ile kesiştiği bir nokta bulunmamaktadır. Daha düşük hasılat hedeflemek ise bir birim girdinin etkin kullanılmadığını gösterecektir. \$144'a karşılık gelen eş-hasılat doğrusunun etkin sınıra teğet olduğu nokta B karar birimidir. Daha önce açıklandığı üzere bu nokta, girdi sabit olmak üzere, en yüksek hasılat ulaşılan ve dolayısıyla tahsis ve toplam etkin olan (iktisadi etkin) karar birimini göstermektedir.

Karar birimi D 'nin iktisadi etkinliğinin bulunabilmesi için bileşenleri olan toplam etkinlik ve tahsis etkinliğinin ayrı ayrı bilinmesi gerekir. Bu amaçla D 'nin etkinlik değerleri ölçülmeye çalışılmıştır.

Sırasıyla $(1.00, 4.25)$ ve $(6.00, 3.00)$ koordinatlarına sahip A ve B karar birimleri arasında olan ve etkin sınırın da bir parçasını temsil eden doğru parçasının üzerinde bulunduğu doğrunun tanımı:

$$\overline{BC} : y = -0.45x + 4.65.$$

D karar biriminin üzerinde olduğu ve $(0,0)$ 'dan geçen doğrunun tanımı ise

$$\overline{OE} : y = x.$$

Bu iki doğrunun kesiştiği nokta, D_{ts} , D noktasıyla aynı üretim karışımını kullanan, ancak toplam etkin olan bir hipotetik karar birimini tanımlamaktadır. Bu noktanın koordinatları $(3.60, 3.60)$ olarak bulunur. OD_{ts} ve OD doğru parçalarının uzunlukları ise sırasıyla 5.091 ve 2.828'dir. Farrell'in etkinlik ölçümü yaklaşımı çerçevesinde, D 'nin toplam etkinlik skoru OD/OD_{ts} yardımıyla, $\tau_{D_{ts}} = \%55.55$ olarak hesaplanır.

D karar biriminin tahsis etkinliğinin belirlenebilmesi için rol model olan ve eş-hasılat doğrusu üzerinde bulunup D ile aynı çıktı karışımını üreten D_{tsa} noktasının koordinatlarının bilinmesi gerekir. D_{tsa} hipotetik karar birimi, doğru denklemleri sırasıyla, $y = x - 9$ ve $y = x$ olan eş-hasılat ve OD doğrusunun kesiştiği yerdedir. Bu noktanın koordinatları $(4.5,4.5)$ 'dir. Yine, Farrell'in ölçüm yaklaşımı kullanılır ve OD_{ts}/OE_{tsa} fiyat etkinliği tanımıyla $\tau_{D_{tsa}} = \%80.00$ bulunur.

Fiyat etkinlik skoru olan 0.8000 ve toplam etkinlik skoru olan 0.5555 değerlerinin çarpımı sonusunda iktisadi etkinlik skoru olarak 0.4444 değerine ulaşılır. Bu değer aynı zamanda, OD/OD_{tsa} oranının değeridir.

Bölüm 3

Veri Zarflama Analizi

3.1 Giriş

Bölüm 2’de incelenen kavramlar arasında, etkinlik analizinin temelini oluşturan etkin sınır kavramı ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu bölümde, Veri Zarflama Analizi(Data Envelopment Analysis-DEA) yardımıyla, etkin sınırın oluşturulma süreci açıklanacaktır. DEA tekniği ile ilgili açıklamalara geçmeden önce *parametrik olmayan* (non-parametric) terimi metinde kullanıldığı çerçevede tanımlanacaktır.

DEA tekniği doğrusal programlama tabanlı, parametrik olmayan bir tekniktir. Bu özelliğinden dolayı DEA, parametrik olmayan programlama olarak da anılmaktadır [79]. Doğrusal programlama ile ilgili olarak Dantzig [55], Bazarra ve Jarvis [20], Luenberger [94], Gass [80] incelenebilir. Parametrik olmama terimi, Diewert ve Parkan [56] tarafından tanımlandığı şekliyle kullanılmıştır: İlgili üretim teknolojisi için sonlu sayıda parametresi olan ve fonksiyonel formu belirlenmiş -örnek olarak Cobb-Douglas fonksiyonel formu verilebilir- bulunan bir fonksiyon sınıfına ait olma varsayımı yapılmamıştır. Parametrik olmayan programlama yaklaşımının bir başka özelliği ise sınırın parçalı doğrusal olarak tanımlanmasıdır. Parametrik yöntemlerde, bunun aksine, sınır kırksız olarak tanımlanmaktadır. Bununla ilgili olarak Fare, Grosskopf ve Lovell [64] incelenebilir. İlgili yazında parametrik olmayan programlama uygulamalarının sayısının giderek artmasına rağmen halen çalışmaların çoğunluğunu *parametrik yöntemler* oluşturmaktadır. Parametrik yöntemlerde,

parametrik olmayan yaklaşımın aksine, üretim sınırını temsil eden fonksiyonun parametreleri belirlenmeye çalışılmaktadır. Parametrik olmayan programlama yaklaşımında etkin sınırdan sapmaların tamamı etkinsizlik olarak değerlendirilirken, parametrik istatistiksel tahmin yaklaşımında sapmanın gürültü ve etkinsizlik bileşenlerinin olduğu kabul edilmektedir. Parametrik istatistiksel tahmin ile ilgili olarak Ferrier ve Lovell [75], Lovell ve Schmidt [93], ve Bauer [19] incelenebilir. DEA'nın içsel olarak tanımladığı üretim fonksiyonundaki gözlem hatalarının olasılık dağılımı ile ilgili herhangi bir varsayımda bulunulmadığı için Sengupta [114] DEA'nın istatistiksel inceleme için uygun olmadığını belirtmiştir. DEA tekniğinde gürültünün dikkate alınması yönünde yapılan katkılara ileride değinilecektir.

Parametrik olmayan programlama yardımıyla etkinlik analizine başlamadan önce üretim fonksiyonunun analitik olarak ifade edilmeye çalışıldığı ve bu süreçte fonksiyonun parametrelerinin bulunduğu, parametrik yöntemlerden biri olan, çoklu regresyon tekniğine değinilecektir. Daha ayrıntılı kapsam için Afriat [2] ve Forsund, Lovell ve Schmidt [76] incelenebilir.

Daha önce (§2.2, s.12) incelenmiş olan kısmi verimliliğin içerdiği sınımların bir kısmını ortadan kaldırabilecek bir teknik olan regresyon tekniğinde, birden çok sayıdaki girdi faktörüyle, tek bir çıktı faktörü açıklanmaya çalışılmaktadır. Bunun için gerekli olan üretim fonksiyonu parametrik olarak bulunmaktadır. Kullanılan yaklaşımların başında, gözlemlerin tanımlanması istenen üretim fonksiyonundan sapmalarının karelerinin toplamını minimize etme gelmektedir. Bir karar biriminin kullandığı girdi miktarları bilindiğinde, üretim sürecinin incelendiği endüstrinin tümü için geçerli olduğu düşünülen fonksiyon yardımıyla, çıktı miktarı öngörülebilmektedir. Gözlenen çıktının, regresyon analizi sonucunda bulunan üretim fonksiyonunun verdiği çıktıdan fazla olması sonucunda, karar biriminin verimliliğinin beklenenden yüksek olduğu, aksi halde verimsiz olduğu, yorumu yapılmaktadır. Kısmi verimlilik ile ilişkili olarak verilen örneğin verisi, regresyon analizi için de kullanılacaktır. İlgili veri, Tablo 3.1 olarak verilmiştir.

Örnekte, iki tür çıktının tanımlanmış olması nedeniyle, standart çoklu regresyon tekniğinin kullanılması mümkün değildir. Bu yüzden, iki çıktı faktörünün toplam değerinin tek bir çıktı faktörü olarak tanımlanabileceği varsayılarak örnek tekrar tanımlanmıştır. O_1 ve O_2 çıktı miktarla-

DMU	Girdiler		Çıktılar		$O_{\Sigma} = O_1 + O_2$	\tilde{O}_{Σ}	Δ	% η
	I_1	I_2	O_1	O_2				
A	1.5	0.2	1.4	0.35	1.75	1.78	-0.030	-1.7
B	4.0	0.7	1.4	2.10	3.50	3.23	0.027	8.4
C	3.2	1.2	4.2	1.05	5.25	4.73	0.520	11.0
D	5.2	2.0	2.8	4.20	7.00	7.08	-0.080	-1.1
E	3.5	1.2	1.9	2.50	4.40	4.73	-0.330	-7.0
F	3.2	0.7	1.4	1.50	2.90	3.24	-0.340	-10.0

Tablo 3.1: Çoklu Regresyon

rının toplamı O_{Σ} olarak tanımlanmış ve tabloda sütun 6 olarak verilmiştir. Çoklu regresyon analizinde I_1 ve I_2 bağımsız değişken, O_{Σ} ise bağımlı değişken olarak tanımlandığında, *en küçük kareler yöntemine* (Least-Squares Method) göre bulunan regresyon ifadesi şöyledir:

$$\tilde{O}_{\Sigma} = 1.21 - 0.02I_1 + 2.98I_2$$

Eşitlikte I_1 ve I_2 girdi miktarları girildiğinde bulunan \tilde{O}_{Σ} değeri, tanımlanan üretim fonksiyonu tarafından bulunan çıktı değeridir. Gerçekleşen çıktı miktarı, O_{Σ} , ile üretim fonksiyonunun verdiği değer arasındaki fark Δ olarak tanımlanmıştır. $\Delta > 0$ olması halinde, ortalamanın üzerinde verim gösterildiği, $\Delta < 0$ olması halinde ise ortalamanın altında verim gösterildiği yorumu yapılır ve yüzde olarak şöyle ifade edilir: $100 \times \Delta / \tilde{O}_{\Sigma}$.

Verilen örnekte B ve C karar birimleri ortalamanın üzerinde performans göstermişlerdir. D , A , E ve F karar birimleri ise verimlilik bakımından ortalamanın altında kalmışlardır. Karar birimlerinin verimlilik sıralaması en iyiden en kötüye doğru olmak üzere C , B , D , A , E ve F 'dir.

Regresyon denklemi bağımsız girdi miktarlarıyla, bağımlı çıktı miktarı arasındaki ilişkiyi verdiği için üretim fonksiyonu olarak düşünülebilir. Ancak, bir üretim fonksiyonu, tanım gereği belirli girdi düzeyinde üretilebilecek maksimum çıktı miktarını gösterirken, regresyon analiziyle bulunan üretim fonksiyonu ortalama değer vermektedir. Regresyon analizinin etkinlik ölçümünde kullanılmasının yarattığı bir sakınca olarak

etkinlik ölçümünün en yüksek performans yerine ortalama performansa göre yapılması söylenebilir.

Yukarıda açıklanan, (i) sadece tek bir çıktı faktörünün bulunabilmesi, ve (ii) ölçümlerin en iyi performans yerine ortalama performansa göre yapılması sakıncalarının yanında bir diğerinin daha belirtilmesi gerekir. Gözlemlerden hareketle elde edilen ortalama üretim fonksiyonu, endüstri içindeki çeşitliliği değerlendiremez ve tüm karar birimlerinin aynı şekilde üretim yaptığı varsayımında bulunur. Bu varsayım sonucunda bulunan ve tüm endüstrinin ortalama üretim fonksiyonu olan ifade kullanıldığında, bazı girdi miktarlarına karşılık gelen çıktı değerinin aslında hiçbir zaman gözlenmemiş değerler olduğu görülür. Bu durum özellikle karar birimlerinin tüm çıktıları ürettikleri, ancak, çeşitli çıktı faktörlerinde uzmanlaştıklarında belirginleşir.

Yukarıda bahsedilen sakıncaları ortadan kaldıracak olan etkinlik ölçüm tekniğinin (i) çok-girdi ve çok-çıkıtısı bulunan bir üretim sürecini bütün olarak değerlendirmesi, (ii) üretim faktörlerinin ortak bir paydada buluşturulması çabası içinde başvurulmuş subjektif olabilecek ağırlık arayışlarına son vermesi, (iii) farklı uzmanlıkları olan, fakat aynı ürünleri üreten veya servisleri sunan karar birimlerinin özelliklerini dikkate alabilmesi, (iv) üretim ekonomisinin teorik çerçevesiyle uyum içinde olması, (v) etkinlik skorunu oluşturan etkinlik bileşenlerini belirleyebilmesi, (vi) gerektiğinde zaman boyutunu dikkate alabilecek olması gerekir.

Bu açıklamalar çerçevesinde, parametrik bir yöntem olan regresyon analizinin etkinlik ölçümünde ne tür zaafı olduğu görülmüş ve parametrik olmayan yöntemlerden neler beklendiği belirlenmiştir.

3.2 Kesirli Programlama ve Etkinlik Ölçümü

Bu kısımda etkinlik analizinde parametrik olmayan programlama yaklaşımı ile ilgili matematiksel model incelenecektir. DEA tekniği olarak adlandırılan parametrik olmayan programlama yaklaşımı esas olarak *kesirli programlama* (fractional programming) formundadır. Kesirli programlama için -doğrusal programlama modellerinin çözümünü veren *Simplex Algoritması*'na benzer- bir standart yöntem bulunmamaktadır. Öte yandan, etkinlik analizinde kullanılan matematiksel programlama modelinin özel yapısı kullanılarak, kesirli programlama modelini standart çözüm

yöntemi bulunan doğrusal programlama modeline dönüştürmek mümkündür. Etkinlik üzerine literatür incelendiğinde, DEA ile ilgili olarak verilen formülasyonların doğrusal programlama formunda olduğu görülür. Ancak, konunun bütünlüğü açısından, önce orijinal kesirli programlama modeli çerçevesinde DEA yaklaşımının özelliklerinin açıklanması ve §3.3'te denk doğrusal programlama modelinin verilmesi uygun görülmüştür.

Bir karar biriminin, k , ürettiği çıktı faktörleri miktarı Y_{rk} , $r = 1, \dots, s$ ve kullandığı girdi faktörleri miktarı X_{ik} , $i = 1, \dots, m$ olsun. Karar birimi k 'nın toplam faktör verimliliği, eğer faktörlere verdiği ağırlıklar çıktı ve girdiler için, sırasıyla, u_{rk} , $r = 1, \dots, s$ ve v_{ik} , $i = 1, \dots, m$ ise

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ik}} \quad (3.2)$$

(3.2)'de verilen ifadede pay kısmı tek bir reel değere karşılık gelmektedir. Bu değer *sanal çıktı* veya *toplam çıktı* olarak adlandırılacaktır. Benzer şekilde, payda da yer alan reel değer *sanal girdi* veya *toplam girdi* olarak tanımlanmıştır.

Faktör fiyatlarının bilindiği ve kârlılığın nihai amaç olduğu durumda faktör ağırlıkları olarak faktör fiyatları kullanılabilir. Ancak, kamu kesiminde olduğu gibi, çeşitli ürünlerin ve hizmetlerin fiyatlarının kesin olarak belirlenemediği veya kârlılığın tek amaç olmadığı durumlarda ağırlık tahsisi için bir yöntem gereksinim vardır. DEA bu tür bir işlevi görmektedir. Özellikle, aynı girdi faktörlerini kullanarak, aynı çıktı faktörlerini üreten homojen karar birimlerinin göreceli performanslarının ölçümünde (3.2)'den DEA sürecinde faydalanılacaktır. Bu süreç içerisinde her bir karar biriminin etkinliğinin ölçümü ayrı ayrı (3.2) yardımıyla yapılacak ve diğer karar birimlerinin de durumu dikkate alınacaktır.

m -girdi s -çıktı için gözlemlerden hareketle etkin sınıır bulunması ve etkin sınır içinde kalan etkin olmayan noktaların merkeze olan radyal uzaklıklarının hesaplanması problemi Charnes, Cooper ve Rhodes [40] tarafından parametrik olmayan programlama tabanlı olarak çözülmüştür. Charnes ve diğerlerinin *Veri Zarflama Analizi* (Data Envelopment Analysis- DEA) adını verdikleri bu yaklaşım sayesinde birden çok ve farklı ölçeklerle ölçülmüş veya farklı ölçü birimlerine sahip girdi ve

çıktıların karar birimleri arasında verimlilik karşılaştırması yapmayı zorlaştırdığı durumlarda, karar birimlerinin görelî performansını Farrell'in yaklaşımı çerçevesinde ölçmek mümkün hale gelmiştir. DEA, Charnes ve diğerleri tarafından ortaya atıldığı 1978 yılından beri gittikçe genişleyen bir uygulama alanına sahip olmuştur. Seiford'un yaptığı kapsamlı bibliyografik tarama [110], ve Seiford ve Thrall'un çalışması [111], DEA'in geldiği yeri görmek bakımından önemlidir.

Farrell'in 1957'deki önemli çalışmasının [73] uzantısı olarak Boles [26] ve Afriat'ın [2] matematiksel programlama önerileri olmuştur; ancak, bu çalışmalar fazla dikkat çekmemiştir. Charnes ve diğerleri tarafından 1978'de yayımlanan ve yaklaşıma DEA adını veren çalışmayla birlikte bu alan yoğun ilgi görmeye başlamıştır. DEA metodolojisi ile ilgili olarak Seiford ve Thrall [111], Fried ve diğerleri [77], Fare ve diğerleri [65], Gansley ve Cubbin [79], Charnes ve diğerleri [39] ve Coelli ve diğerleri [52] incelenebilir.

Charnes ve diğerlerinin [40], [41] Farrell'in tanımından hareketle kurdukları kesirli programlama modeli ve bunun eş doğrusal programlama modeli (Charnes-Cooper-Rhodes Modeli, CCR Modeli) aşağıda verilmiştir. Bu modelleri takiben bazı önemli yönetsel bilgileri içeren düal model kurulmuştur.

Karar birimi k , ağırlıklarını kendi toplam faktör verimliliğini maksimize edecek şekilde seçebilmelidir. Böylece, her karar biriminin kendi özel durumunu etkinlik analizi çerçevesinde tanımlaması mümkün olmaktadır. Ancak, karar birimi k 'nın seçtiği ağırlık kümesinin diğer karar birimlerine uygulandığında hiç bir karar biriminin toplam faktör verimliliği 1.0'ın üzerine çıkmamalıdır. Aksi halde karar birimi k için toplam faktör verimlilik değeri sınırsız bulunur. Etkinlik skorlarının belirli bir aralıkta olması için sınır getirilmesi gerekmektedir. Bu üst sınır 1.0 olarak seçilmiştir. Ayrıca, karar birimi k 'nın elde ettiği etkinlik skorunun diğer karar birimlerinin skorları çerçevesinde normalize edilmesi gerekir. Bu kısıt şu şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.3)$$

Ayrıca karar birimi k tarafından kullanılacak girdi ve çıktı ağırlıklarının

negatif olamayacağı da açıktır:

$$u_{rk} \geq 0, \quad v_{ik} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4)$$

Bu açıklamalar çerçevesinde oluşturulan ve toplam faktör verimliliği *TFP* (Total Factor Productivity) kavramına dayanan model TFP_I olarak verilmiştir. Model adında yer alan *I* indisi modelin girdiye yönelik olduğunu göstermektedir.

Model TFP_I :

max

$$h_k = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ik}} \quad (3.5)$$

s.t.

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.6)$$

$$u_{rk} \geq 0, \quad v_{ik} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \quad (3.7)$$

Charnes, Cooper ve Rhodes [40] tarafından geliştirilen kesirli programlama formundaki parametrik olmayan etkinlik ölçüm modeli, çözümü daha kolay olan doğrusal programlama modeline dönüştürülmüştür.

Ancak, yine Charnes, Cooper ve Rhodes tarafından tespit edilen bir eksiklik, daha sonra [41]'de düzeltilmiştir. Matematiksel programlama modelinde kullanılan u_{rk} ve v_{ik} ağırlıkları ile ilgili olan $u_{rk} \geq 0$ ve $v_{ik} \geq 0$ kısıtlarının $u_{rk} > 0$ ve $v_{ik} > 0$ şeklinde değiştirilmesi gerekmiştir. Buna ilişkin bir örnek Charnes, Cooper ve Rhodes [41] tarafından verilmiştir: Tablo 3.2 iki girdi faktörü kullanarak tek bir çıktı faktörünün üretimini gerçekleştiren iki karar biriminin kullandıkları girdi ve ürettikleri çıktı miktarlarını göstermektedir. Görüleceği üzere, her iki karar birimi de aynı miktarda I_1 kullanmakta ve aynı miktarda O üretmektedir. Karar birimlerinin etkinlikleri arasındaki farkı belirleyen, kullandıkları I_2 miktarıdır. Bu çerçevede, sadece karar birimi B 'nin görelî tam etkin olduğu söylenebilir; çünkü, *ceteris paribus*, karar birimi B daha az I_2 kullanmıştır.

DMU	Çıktı	Girdiler	
	O	I_1	I_2
A	1.0	2.0	6.0
B	1.0	2.0	5.0

Tablo 3.2: Charnes-Cooper-Rhodes'un Örneği

Ancak, (3.5)-(3.7) ile tanımlanan, karar birimi A için kurulan modelin

$$\begin{aligned}
& \max \\
& \frac{1u_A}{2v_{1A} + 6v_{2A}} \\
& \text{s.t.} \\
& \frac{1u_A}{2v_{1A} + 6v_{2A}} \leq 1 \\
& \frac{1u_A}{2v_{1A} + 5v_{2A}} \leq 1 \\
& u_A \geq 0, \quad v_{(1,2)A} \geq 0
\end{aligned}$$

çözümünden $\tau_A = 1.0$ bulunur. Bu karar biriminin girdi-çıktı faktörlerine verdiği ağırlıklar $u_A = 1$, $v_{1A} = 0.5$ ve $v_{2A} = 0.0$ 'dır. Karar birimi A , B 'ye kıyasla daha fazla girdi I_2 kullandığı için, bu zayıflığını kapatmak üzere v_{2A} faktörünün katsayısı $v_{2A} = 0.0$ olarak seçilmiştir. Bu sakıncanın ortadan kaldırılmasına yönelik olarak $u_{rk} > 0$ ve $v_{ik} > 0$ kısıtları Charnes, Cooper ve Rhodes [41] tarafından tanımlanmıştır. Kalan kısmı değişmemek üzere, eklenen $u_{rk} > 0$ ve $v_{ik} > 0$ kısıtlarıyla tanımlanan model *Arşimedgil olmayan model* (non-Archimedean model) olarak adlandırılmaktadır. İlgili model (3.8)-(3.10) olarak verilmiştir. Model adında yer alan I modelin girdiye yönelik olduğunu, ϵ ise modelin Arşimedgil olmadığını göstermektedir. Arşimedgil olmayan modelde yer alan ϵ , pratikte 10^{-6} gibi küçük bir değer olarak alınmakta ve *Arşimedgil olmayan*

büyükük olarak adlandırılmaktadır.

Model TFP_I^ϵ :

max

$$h_k = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ik}} \quad (3.8)$$

s.t.

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.9)$$

$$u_{rk} \geq \epsilon, \quad v_{ik} \geq \epsilon \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \quad (3.10)$$

Bu noktada, daha önce incelenen regresyon tekniği ile DEA arasında bir karşılaştırma yapan ilk çalışmalardan olan Banker, Conrad ve Strauss'un [8] çalışmasından kısaca bahsetmekte fayda görülmektedir. Banker, Conrad ve Strauss tarafından gerçekleştirilen North Carolina'da bulunan 114 hastaneyi kapsayan bir çalışmada, hastane üretim fonksiyonu belirlenmiş ve etkinlik analizleri yapılmıştır. Girdi faktörleri olarak hemşire hizmetleri, destek hizmet servisi, idari servisler ve sermaye alınırken, çıktı faktörleri olarak üç farklı yaş grubu için hastanede kalma süreleri seçilmiştir. Daha önce yapılmış olan regresyon tabanlı çalışmalar ölçeğe göre getirinin değişmediğini bulmuştur. DEA tekniği ise getirinin ölçeğe göre değiştiğini tespit etmiştir. Regresyon yaklaşımındaki bütün modelin tek bir optimizasyon çerçevesinde oluşturulması yerine DEA yaklaşımında her bir karar birimi için bir optimizasyon modeli kullanılmakta, böylece ortalamalar yerine bireysel değerlendirme yapılabilmektedir. Banker ve diğerleri [12] ve Bowlin ve diğerleri [28] tarafından yapılan çalışmalar DEA tekniğinin regresyon analizine olan üstünlüğünü ortaya koymuştur.

3.3 Doğrusal Programlama ve Etkinlik Ölçümü

§3.2'de verilen kesirli programlama modeli, Simplex algoritması ile çözülebilen doğrusal programlama modeline dönüştürülebilmektedir. (3.5)

amaç fonksiyonunda verilen ifadeyi, (3.6) kısıtı altında maksimize eden bir mümkün çözüm (u^*, v^*) ise, o zaman tüm $(\alpha u^*, \alpha v^*)$ mümkün çözümleri, $\alpha > 0$ olmak üzere, amaç fonksiyonunu maksimize ederler. Charnes ve Cooper [35], [36] tarafından kullanılan

$$\sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ik} = 1 \quad (3.11)$$

dönüşümü ile sonsuz elemanlı çözüm kümesini temsil eden bir çözüm bulunur. Dönüşüm sonucu bulunan ve Simplex algoritması yardımıyla çözülebilen bu model M_I olarak adlandırılacaktır:

Model M_I :

max

$$\phi_k = \sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rk} \quad (3.12)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ik} = 1 \quad (3.13)$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.14)$$

$$\mu_{rk} \geq 0, \quad \nu_{ik} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m$$

Modelin adı olan M_I 'de yer alan I indisi modelin girdiye yönelik olduğunu göstermektedir. Arşimedgil olmayan modelde katsayılar için negatif olmama kısıtı $\mu_{rk} \geq \epsilon$ ve $\nu_{ik} \geq \epsilon$ olarak ifade edilir.

DEA analizinin sonuçlarını alabilmek için model M_I her karar biriminin kendi parametreleriyle yeniden çözülmelidir. Dikkat edilecek olursa, bu doğrusal programlama modelleri birbirine çok benzemektedir. İkinci kısıt kümesini gösteren (3.14) tüm modellerde aynıdır. Farklı karar birimlerine ilişkin etkinlik modellerinde parametre değişikliğine sadece amaç fonksiyon, (3.12), ve ilk kısıtlamada, (3.13), ihtiyaç duyulmaktadır.

Etkinlik analizi için kurulan kesirli programlama modelinden, denk doğrusal programlama modeline geçiş formal gösterimlere girilmeden verilmştir. Ancak, modeller arasındaki ilişkiyi daha ayrıntılı görebilmek ve yorumlamak için sezgisel kestirimlerin ötesine geçmek ve kesirli-doğrusal

programlama modelleri arasındaki ilişkiyi formel olarak ortaya koymak gerekmektedir. Bu hususla ilgili olarak §3.4 incelenebilir.

3.4 Kesirli-Doğrusal Dönüşümü

§3.3 kapsamında model M_I olarak verilen formülasyonun etkinlik maksimizasyonu yaptığı göz önünde tutulursa, etkinsizlik minimizasyonu yapacak olan "karşıt" (reciprocal) model benzer şekilde kurulabilir. Bu model (3.15)-(3.17) olarak verilmiştir.

Model TFP_O :

min

$$f_k = \frac{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ik}}{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rk}} \quad (3.15)$$

s.t.

$$\frac{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rj}} \geq 1 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.16)$$

$$u_{rk} \geq 0, \quad v_{ik} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \quad (3.17)$$

Model adında geçen O indisi modelin çıktıya yönelik olduğunu göstermektedir.

Kesirli programlama ve doğrusal programlama arasındaki geçişi matematiksel olarak açıklamak üzere Charnes, Cooper ve Rhodes [40] tarafından verilen formülasyon kullanılacaktır. Bu çerçevede (3.18)-(3.21)

modelinin tanımlanmasıyla başlanmıştır.

$$\max \quad z_k \quad (3.18)$$

s.t.

$$-\sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} + Y_{rk} z_k \leq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.19)$$

$$\sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} \leq X_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.20)$$

$$\lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.21)$$

Tanımlanan (3.18)-(3.21) modeli bir doğrusal programlama modelidir, ve tüm doğrusal programlama modelleri gibi bir düali bulunmaktadır. (3.18)-(3.21) modeline karşılık gelen düal model (3.22)-(3.25) olarak verilmiştir.

min

$$g_k = \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ik} \quad (3.22)$$

s.t.

$$-\sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rj} + \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ij} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.23)$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rk} = 1 \quad (3.24)$$

$$\mu_{rk} \geq 0, \nu_{ik} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \quad (3.25)$$

Charnes ve Cooper'ın [35], [36] çalışmaları çerçevesinde (3.22)-(3.25) modelinin doğrusal kesirli bir programlama modeline denk olduğu görülür.

Bunun için şu tanımlamalar yapılır:

$$\nu_{ik} = t \nu_{ik}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.26)$$

$$\mu_{rk} = t u_{rk}, \quad r = 1, \dots, s \quad (3.27)$$

$$t^{-1} = \sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rk} \quad (3.28)$$

ν , μ , ve t^{-1} tanımlamaları çerçevesinde elde edilen model

$$\begin{aligned} & \min \\ & f_k = \frac{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ik}}{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rk}} \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ij} - \sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rj} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \\ & u_{rk} \geq 0, \quad v_{ik} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

(3.22)-(3.25) ile aynıdır. Ayrıca, (3.22)-(3.25)'in TFP_O ile aynı olduğu görülmektedir. Böylece, (3.22)-(3.25) doğrusal programlama modeli ile TFP_O , ve dolayısıyla TFP_I , optimal olarak çözülebilmektedir.

Sonuç olarak,

$$f_k^* = g_k^* = z_k^* \quad (3.29)$$

ve böylece

$$h_k^* = 1/z_k^* \quad (3.30)$$

bulunur. Tam etkinlik sadece ve sadece

$$f_k^* = h_k^* = 1 \quad (3.31)$$

bulunması halinde vardır. $f_k^* > 1$ sonucu $h_k^* < 1$ 'i gerektirir ve etkinsizlik olduğunu gösterir.

Doğrusal matematiksel programlama modelleri ile ilgili önemli bir kavram da *aylak değişkenler*dir (slack variables). Aylak değişkenlerin yukarıda verilen modellerdeki işlevini görebilmek için ilgili modeller vektör gösterimiyle verilecektir. \vec{Y}_j vektörü gözlenen çıktıları veren Y_{rj} , $r = 1, \dots, s$, değerlerini içermektedir. Benzer şekilde, \vec{X}_j vektörü gözlenen girdileri veren X_{ij} , $i = 1, \dots, m$, değerlerini içermektedir. \vec{Y}_j ve \vec{X}_j 'ye bağlı olarak

$$\vec{P}_j = \begin{pmatrix} \vec{Y}_j \\ \vec{X}_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, N \quad (3.32)$$

tanımlanmıştır. Bu tanımlarla, (3.18)-(3.21) olarak ifade edilen model, vektör gösterimiyle

$$\max \quad z_k \quad (3.33)$$

s.t.

$$-\sum_{j=1}^N \vec{Y}_j \lambda_j + \vec{Y}_k z_k \leq 0 \quad (3.34)$$

$$\sum_{j=1}^N \vec{X}_j \lambda_j \leq \vec{X}_k \quad (3.35)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.36)$$

olarak yazılır. Modelin optimal çözümü z_k^* , \bar{s}_+^* , \bar{s}_-^* , ve λ_j^* ile gösterilsin. Bu gösterimde, \bar{s}_+^* çıktı, \bar{s}_-^* ise girdi eşitsizliklerindeki negatif olmayan aylak miktarına ilişkin vektörü gösterebilir. Eğer $z_k^* > 1$ ise, (3.29)-(3.31) kullanılarak etkin sınıra ulaşılmadığı sonucuna varılır.

Bu yorumun ötesinde, eğer \bar{s}_+^* pozitif bir bileşene sahip ise, o zaman, λ_j^* değerlerini değiştirmeden ve kısıtları ihlal etmeden, \bar{s}_+^* 'nin pozitif bileşenine karşılık gelen çıktı miktarını ilgili aylak değişkenin miktarı kadar artırmak mümkündür. Benzer şekilde, eğer \bar{s}_-^* pozitif bir bileşene sahip ise, o zaman, λ_j^* değerlerini değiştirmeden ve kısıtları ihlal etmeden, \bar{s}_-^* 'nin pozitif bileşenine karşılık gelen girdi miktarını ilgili aylak değişkenin miktarı kadar azaltmak mümkündür. Bu iki durumda da, karar birimi etkinlik skoru olarak $z_k^* = 1.0$ değerini almış olsa dahi tam etkin sayılamaz.

Bu bağlamda, Charnes, Cooper ve Rhodes [40] bir karar biriminin etkin sayılabilmesi için gerek yeter şartı şöyle tanımlamışlardır:

- (i) $z_k^* = 1$,
- (ii) Tüm aylak değişkenlerin değeri sıfırdır.

Bu gözlemler *Pareto-Koopmans* etkinlik tanımı ile yakından ilişkilidir. Herhangi bir çıktı faktörünün miktarının artırılması veya herhangi bir girdi faktörünün miktarının azaltılmasının bir maliyeti vardır. Pareto-Koopmans etkinlik tanımı ile ilgili ayrıntılı bilgi [34] kapsamında verilmiştir.

Bu noktada, etkin olmayan bir karar biriminin etkin yönetimi sonucunda üreteceği artı değerleri incelemek üzere, karar birimlerinin etkin olarak tanımlanma şartlarından hareketle çeşitli yorumlar yapılacaktır. (3.33)-(3.36) modelinin optimum çözümü z_k^* , \bar{s}_+^* , \bar{s}_-^* , ve λ_j^* ile gösterilsin. Bu bilgiler çerçevesinde (3.37)-(3.40) modeli kurulabilir.

$$\max \quad \hat{z}_k \quad (3.37)$$

s.t.

$$-\sum_{j=1}^N \vec{Y}_j \hat{\lambda}_j + (\vec{Y}_k z_k^* + \bar{s}_+^*) \hat{z}_k \leq 0 \quad (3.38)$$

$$\sum_{j=1}^N \vec{X}_j \hat{\lambda}_j \leq \vec{X}_k - \bar{s}_-^* \quad (3.39)$$

$$\hat{\lambda}_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.40)$$

Model (3.37)-(3.40), *değiştirilmiş problem* (varied problem) olarak tanımlanmaktadır [40]. Bu modelin etkinsizliğin giderilmesine yönelik olarak nasıl kullanılacağı görülecektir. Bu kapsamda

- (a) girdi miktarlarını, orijinal girdi vektörü olan \vec{X}_k 'den, düzeltilmiş vektör olan $\vec{X}_k - \bar{s}_-^*$ 'e indirgeme, ve
- (b) çıktı miktarlarını, orijinal çıktı vektörü olan \vec{Y}_k 'den, düzeltilmiş vektör olan $\vec{Y}_k z_k^* + \bar{s}_+^*$ 'e yükseltme,

hususla tartışılacaktır.

İlk olarak, düzeltilmiş değerlerin tanımlandığı gözlemlerin, yukarıda verilen etkinlik şartlarını sağladığı gösterilecektir. Açıkta ki $\hat{z}_k^* \geq 1$, çünkü halihazırda, $\hat{z}_k^* = 1$ model (3.33)-(3.36) için sağlanmaktadır. $\hat{z}_k^* > 1$ 'in (3.37)-(3.40) ile tanımlanan modeli sağladığı varsayıldığında, $\bar{s}_+^* > 0$ ve $\bar{s}_-^* > 0$ olduğu için,

$$-\sum_{j=1}^N \vec{Y}_j \hat{\lambda}_j^* + \vec{Y}_k \hat{z}_k^* z_k^* \leq -\sum_{j=1}^N \vec{Y}_j \hat{\lambda}_j^* + (\vec{Y}_k z_k^* + \bar{s}_+^*) \hat{z}_k^* \leq 0 \quad (3.41)$$

ile

$$\sum_{j=1}^N \vec{X}_j \hat{\lambda}_j^* \leq \vec{X}_k - \bar{s}_-^* \leq \vec{X}_k \quad (3.42)$$

elde edilir. Eşitsizliklerdeki en soldaki ifadeler (3.33)-(3.36) modelini sağladığı için, bu modelde yer alan z_k^* yerine \hat{z}_k^* , ve λ_k^* yerine $\hat{\lambda}_k^*$ yazılabilir. Ayrıca, $\hat{z}_k^* > 1$ eşitsizliği sağlandığı zaman

$$\max \quad z_k \geq z_k^* \hat{z}_k^* > z_k^* \quad (3.43)$$

olur. Fakat, hipotez gereği, $z_k^* = \max z_k$ 'dir. Böylece, bu çelişki sonucu, değiştirilmiş problemi gösteren (3.37)-(3.40) için optimal değer \hat{z}_k^* olduğu ispat edilmiş olur.

Bu ispatı takiben (3.33)-(3.36) modelinin optimal çözümü olan λ_j^* 'ın, $j = 1, \dots, N$, değiştirilmiş problemi gösteren (3.37)-(3.40) için de optimal çözüm olduğu, ve aylak değişkenlerin değerlerinin sıfır olduğu, yani \vec{s}_+^* ve \vec{s}_-^* vektörlerinin tüm elemanlarının etkinlik tanımının gerektirdiği şekilde sıfır olduğu, gösterilecektir.

İlk olarak, (3.33)-(3.36) modelinin optimal çözümü çerçevesinde

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^N \vec{Y}_j \lambda_j^* + \vec{Y}_k z_k^* + \vec{s}_+^* &= 0 \\ \sum_{j=1}^N \vec{X}_j \lambda_j^* &= \vec{X}_k - \vec{s}_-^* \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece λ_j^* değiştirilmiş problemin, $\hat{z}_k = 1$ için, mümkün bir çözümüdür. Diğer bir ifadeyle, $\hat{z}_k = 1$ için,

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^N \vec{Y}_j \lambda_j^* + (\vec{Y}_k z_k^* + \vec{s}_+^*) \hat{z}_k &= 0 \\ \sum_{j=1}^N \vec{X}_j \lambda_j^* &= \vec{X}_k - \vec{s}_-^* \quad . \end{aligned}$$

$\hat{z}_k^* = 1$ olduğu gösterildiği için, λ_j^* 'nin de optimal olduğu görülür. Buna ek olarak, optimal aylak değişkenleri gösteren, \vec{s}_+^* ve \vec{s}_-^* de sıfırdır.

Özet olarak, belirtilen müdahalelerle etkisiz olarak değerlendirilen karar birimlerinin görece etkin sınıra çekilmelerinin mümkün olduğu görülmüştür. Bunun için sadece z_k^* , \vec{s}_+^* ve \vec{s}_-^* 'nin değerleri çerçevesinde \vec{Y}_k ve \vec{X}_k vektörlerinin yeni değerlerinin hesaplanması yeterlidir.

3.5 Primal ve Düal CCR Modelleri

Bu kısımda, bir kısmı daha önce  3.3 ve  3.4 kapsamında verilen, doğrusal programlama modelleri girdiye ve çıktıya yönelik olarak sınıflandırılacak ve düal modelleri verilecektir. Sınıflandırmada Arşimedgil olmayan modellere değinilmeyecek ve konu ayrıca incelenmek üzere  3.6'ya bırakılacaktır.

3.5.1 Girdiye Yönelik CCR Modelleri

Toplam faktör verimliliği (TFP) kavramından hareketle tanımlanan girdiye yönelik kesirli programlama modeli, daha önce verildiği Şekliyle, bütünlük açısından tekrar (3.44)-(3.46) olarak verilmiştir. Hatırlanması gereken önemli bir nokta, bu modelin * l eđe göre sabit getiri (CRS)* varsayımı altında toplam etkinliği  l t đ d r.

Model TFP_I :

max

$$h_k = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ik}} \quad (3.44)$$

s.t.

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.45)$$

$$u_{rk} \geq 0, \quad v_{ik} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \quad (3.46)$$

TFP_I modeli esas alınarak kurulan denk doğrusal programlama modeli  3.3 kapsamında incelenmiştir. Bu model bütünlük açısından aşağıda (3.47)-(3.50) olarak verilmiştir. Primal formda olan bu model DEA ya-

zında *çarpan modeli* (multiplier model) olarak anılmaktadır.

Model M_I :

max

$$\phi_k = \sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rk} \quad (3.47)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ik} = 1 \quad (3.48)$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.49)$$

$$\mu_{rk} \geq 0, \quad \nu_{ik} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \quad (3.50)$$

Model M_I 'nin düali kurulduğunda elde edilen model E_I olarak adlandırılmıştır. Bu düal model DEA yazınında *zarflama modeli* (envelopment model) olarak geçmektedir.

Model E_I :

$$\min \quad \theta_k \quad (3.51)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} \geq Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.52)$$

$$\theta_k X_{ik} - \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.53)$$

$$\lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.54)$$

3.5.2 Çıktıya Yönelik CCR Modelleri

Önceki kısımda girdiye yönelik olarak verilen CCR modelleri, bu kısımda çıktıya yönelik olarak kurulmuşlardır. Ancak, *ölçeğe göre sabit getiri* (CRS) varsayımı geçerliliğini korumaktadır. İlk olarak toplam faktör verimliliği (TFP) kavramından hareketle tanımlanan çıktıya yönelik ke-

kirli programlama modeli, TFP_O , verilmiştir.

Model TFP_O :

min

$$f_k = \frac{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ik}}{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rk}} \quad (3.55)$$

s.t.

$$\frac{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rj}} \geq 1 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.56)$$

$$u_{rk} \geq 0, \quad v_{ik} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \quad (3.57)$$

Kesirli programlama modellerinin doğrusal programlama modellerine indirgenmesi üzerine verilen yaklaşım çerçevesinde, TFP_O kesirli programlama modeli, M_O doğrusal programlama modeli olarak ifade edilmiştir.

Model M_O :

min

$$g_k = \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ik} \quad (3.58)$$

s.t.

$$-\sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rj} + \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ij} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.59)$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rk} = 1 \quad (3.60)$$

$$\mu_{rk} \geq 0, \nu_{ik} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \quad (3.61)$$

Model M_O 'nun düal modeli, bir zarflama modeli olan E_O 'dur ve aşağıda verilmiştir.

Model E_O :

$$\max \quad z_k \quad (3.62)$$

s.t.

$$- \sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} + Y_{rk} z_k \leq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.63)$$

$$\sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} \leq X_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.64)$$

$$\lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.65)$$

Böylece, girdiye ve çıktıya yönelik toplam faktör verimliliği çarpan ve zarflama modelleri ileride referans verilmek üzere ayrı ayrı sunulmuştur. Bu modellere ilişkin nümerik örnekler ileride verilecektir.

Etkinlik analizi yapılmasının ana hedefleri arasında karar birimlerinin durumlarının belirlenebilmesi olduğu kadar etkin olmayanlara yol gösterilmesi de bulunmaktadır. Buna ilişkin olarak oluşturulan referans kümeleri §3.5.3'te anlatılmıştır.

3.5.3 Referans Kümesi

Bu kısımda, §3.4'de matematiksel bir çerçevede tartışılan, etkin olmayan karar birimlerinin etkin sınıra çekilebilmeleri için gerekli olan rol modellerinin tanımlanması konusu ele alınmıştır. Bu süreçte, *zarflama modellerinden* faydalanılacaktır. Girdiye ve çıktıya yönelik olarak tanımlanmış olan CCR zarflama modellerinden, E_I ve E_O , (3.51)-(3.54) ile tanımlanan E_I kullanılacaktır. Benzer şekilde E_O da kullanılabilir.

E_I modelinin düal model kabul edilmesi halinde, karşılık gelen primal model M_I 'dir. Aşağıda, M_I modeli ve [.] içinde kısıtlarına karşılık gelen

düal değişkenler verilmiştir.

Model M_I :

max

$$\phi_k = \sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rk} \quad (3.66)$$

s.t.

$$[\theta_k] \quad \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ik} = 1 \quad (3.67)$$

$$[\lambda_{jk}] \quad \sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.68)$$

$$\mu_{rk} \geq 0, \quad \nu_{ik} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \quad (3.69)$$

M_I modelinde yer alan her karar birimine karşılık bir düal değişken tanımlandığı görülmektedir. Tanımlanan düal değişkenler, λ_{jk} ve θ_k , yardımıyla kurulan E_I modeli (3.70)-(3.74) olarak verilmiştir.

Model E_I :

$$\min \quad \theta_k \quad (3.70)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} \geq Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.71)$$

$$\theta_k X_{ik} - \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.72)$$

$$\lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.73)$$

$$-\infty < \theta_k < \infty \quad (3.74)$$

Düal modelde yer alan θ_k ve λ_{jk} düal değişkenleri yönetsel açıdan önemli bilgiler içermektedir. Bu yüzden ayrıntılı olarak inceleneceklerdir.

Düal değişken θ_k 'nın yorumlanması kolaydır. Dikkat edilecek olursa (3.74) $-\infty < \theta_k < \infty$ kısıtını getirmektedir. Diğer bir deyişle, θ_k negatif veya pozitif tüm reel değerleri alabilmektedir. Öte yandan, düalite teorisinden bilindiği üzere primal ve düal modellerin, optimal bir çözüm

bulunması halinde, optimal çözümleri aynıdır. Primal model olan M_I 'nin amaç fonksiyonu etkinlik skorunu verdiği ve etkinlik skoru negatif bir değer olamayacağı için θ_k düal değişkeni sınırsız olarak tanımlansa dahi alabileceği değerler negatif olmayanlar ile sınırlıdır. $\theta_k = 0$ olması durumunda ise bir çelişkinin ortaya çıktığı görülmektedir. (3.72) kısıtından görüleceği üzere, θ_k 'nin sıfır olması durumunda

$$-\sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} \geq 0$$

bulunur. Toplam ifadesinde yer alan X_{ij} 'ler pozitif oldukları için eşitsizlik sadece ve sadece $\lambda_{jk} = 0$ durumunda sağlanır. Öte yandan, $\lambda_{jk} = 0$ olması, (3.71) kısıtının sağlanma ihtimalini ortadan kaldırmaktadır. Sonuç olarak, θ_k değeri sıfır değerini de alamayacaktır, ve θ_k 'nin tanım kümesi $(0, 1]$ olarak bulunur.

Düal değişken λ_{jk} için yapılacak yorum biraz daha karışıktır. *Tümlenici aylıklık teoremi* (complementary slackness theorem), λ_{jk} 'nin, sadece karar birimi k 'nin M_I modelinde karşılık geldiği eşitsizliğin eşitlik olarak da sağlanması halinde pozitif değer alabileceğini söyler. Bu durum ise karar birimi j 'nin etkin olduğunu ifade eder. Bunu daha açık görebilmek için karar birimi k 'nin M_I modeli incelenmelidir. λ_{jk} 'nin pozitif değer almasının bir sonucu olarak, (3.68)'den

$$\sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ij} = 0$$

veya

$$\frac{\sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rj}}{\sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ij}} = 1$$

yazılır. Diğer bir deyişle, karar birimi j , karar birimi k 'nin ν_{ik} ve μ_{rk} ağırlıkları çerçevesinde, diğer tüm karar birimleri de dikkate alındığında etkin olmaktadır. Bunun sonucu olarak, etkinlik modelinin karar birimi k için kurulmuş olmasına bakılmaksızın, karar birimi j 'nin görelî tam etkin olduğu sonucuna varılır.

Dolayısıyla, karar-birimi k 'nın primal modelinde pozitif değerler verilen tüm düal değişkenlerin karşılık geldikleri karar birimleri etkindir. Bu karar birimlerinin oluşturduğu kümeye karar birimi k 'nın *referans kümesi* (reference set) adı verilir. Genellikle, eğer k etkin ise, o zaman referans kümesindeki tek karar birimi kendisi olacaktır ve düal değişken λ_{kk} 'nın değeri 1.0'a eşit bulunacaktır. Etkin olmayan karar birimleri için referans kümesi, etkinliğin yakalanabilmesi için neler yapılması gerektiği konusunda yöneticiye reçete sunmaktadır.

Etkinlik skoru 1.0'den küçük olan bir karar birimi k 'nın bulunduğu varsayalım. Karar birimi k 'nın referans kümesi \mathcal{R}_k ile gösterilecektir. Girdi/çıktı miktarları, (3.78)-(3.79) çerçevesinde karar birimi k 'nın referans kümesinde yer alan karar birimlerinin girdi/çıktı miktarlarının doğrusal kombinasyonları yardımıyla belirlenmiş bir hipotetik karar birimi κ tanımlansın:

$$X_{i\kappa} = \sum_{q \in \mathcal{R}_k} \lambda_{kq} X_{iq} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.78)$$

$$Y_{r\kappa} = \sum_{q \in \mathcal{R}_k} \lambda_{kq} X_{rq} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.79)$$

Karar birimi κ 'nın iki önemli özelliği vardır. İlk olarak, karar birimi κ , karar birimi k 'ye kıyasla her bir girdi faktöründen daha az kullanmakta ve her bir çıktı faktöründen en az onun kadar üretmektedir. Bunu görebilmek için E_I modeli incelenmelidir:

$$\sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} \geq Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.80)$$

$$\sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} \leq \theta_k X_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.81)$$

Hatırlanması gereken iki önemli nokta bulunmaktadır. İlk olarak, karar birimi k 'nın etkinlik skorunun 1.0'den küçük olduğu, $\theta_k < 1.0$, ve λ_{jk} düal değişkenlerinin sadece karar birimi k 'nin referans kümesinde yer alan karar birimleri için pozitif, aksi halde sıfır olduklarıdır. İkinci olarak, karar birimi κ 'nın etkin olduğu ve optimal girdi/çıktı ağırlıklarının karar birimi k 'nin ağırlıkları ile orantılı olduğudur. Bu oranın değeri

$1/\theta_k$ 'dir. Bununla ilgili olarak aşağıda karar birimi κ 'nın sanal girdi, sanal çıktı oranı incelenmiştir:

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{r\kappa}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{i\kappa}} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} \left(\sum_{q \in \mathcal{R}} \lambda_{kq} Y_{rq} \right)}{\sum_{i=1}^m v_{ik} \left(\sum_{q \in \mathcal{R}} \lambda_{kq} X_{iq} \right)} = \frac{\sum_{q \in \mathcal{R}} \lambda_{kq} \left(\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{r\kappa} \right)}{\sum_{q \in \mathcal{R}} \lambda_{kq} \left(\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{i\kappa} \right)} \quad (3.82)$$

İlk adımda $X_{i\kappa}$ ve $Y_{r\kappa}$ 'nın (3.78)-(3.79)'de verilen denk ifadeleri kullanılmıştır. İkinci adımda toplama sırası değiştirilmiştir.

Bunu takiben tümleyici aylıklık teoremine referans verilerek oranların 1.0'a denk olduğu gösterilebilir. Bunun için, $\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{r\kappa}$ ve $\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{i\kappa}$ toplamlarının, karar birimi k 'nin referans kümesinde yer alan karar birimleri için aynı olduğunu görmek yeterlidir. Bu toplamların aynı olmasının sebebi, referans kümesinde bulunan karar birimlerinin etkinlik skorlarının 1.0, ve dolayısıyla pay ve payda değerlerinin aynı olmasıdır.

Yukarıda, karar birimi k 'ya rol modeli olacak hipotetik karar birimi κ 'nın etkinliği üzerine açıklamalarda bulunuldu. Sanal çıktının sanal girdiye oranının 1.0 olmasının yanında, κ 'nın kendisi için kurulacak olan M_I modelinde yer alan

$$\sum_{i=1}^m \nu_{i\kappa} X_{i\kappa} = 1$$

kısıtına bağlı olarak girdi/çıkıtı ağırlıklarını ölçeklendirmesi gerekmektedir. Uygun ölçeklendirme faktörü olarak $1/\theta_k$ seçilmelidir.

$$\sum_{i=1}^m \nu_{i\kappa} X_{i\kappa} = \sum_{i=1}^m \nu_{ik} (\theta_k X_{ik}) \quad (3.84)$$

$$= \theta_k \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ik} = \theta_k \quad (3.85)$$

(3.84)'de $X_{i\kappa}$, θX_{ik} ile değiştirilmiştir. Bu değişiklik $\nu_{ik} = 0$ olduğu zaman geçerli değildir. Ancak bu durum formülasyon bakımından bir sorun teşkil etmemektedir. Çünkü, ifade incelendiğinde $X_{i\kappa}$ 'nin çarpanı olarak ν_{ik} 'nin bulunduğu, ve dolayısıyla $\nu_{ik} = 0$ olduğu zaman $X_{i\kappa}$ değerinin öneminin kalmadığı görülür.

DMU	Girdiler ve Çıktı			Normalize Girdi	
	X_1	X_2	Y	X_1/Y	X_2/Y
<i>A</i>	20.0	70.0	10.0	2	7
<i>B</i>	80.0	80.0	20.0	4	4
<i>C</i>	35.0	10.0	5.0	7	2
<i>D</i>	28.0	49.0	7.0	4	7
<i>E</i>	27.0	15.0	3.0	9	5
<i>F</i>	42.0	42.0	6.0	7	7

Tablo 3.3: M_I Örneği için Veri

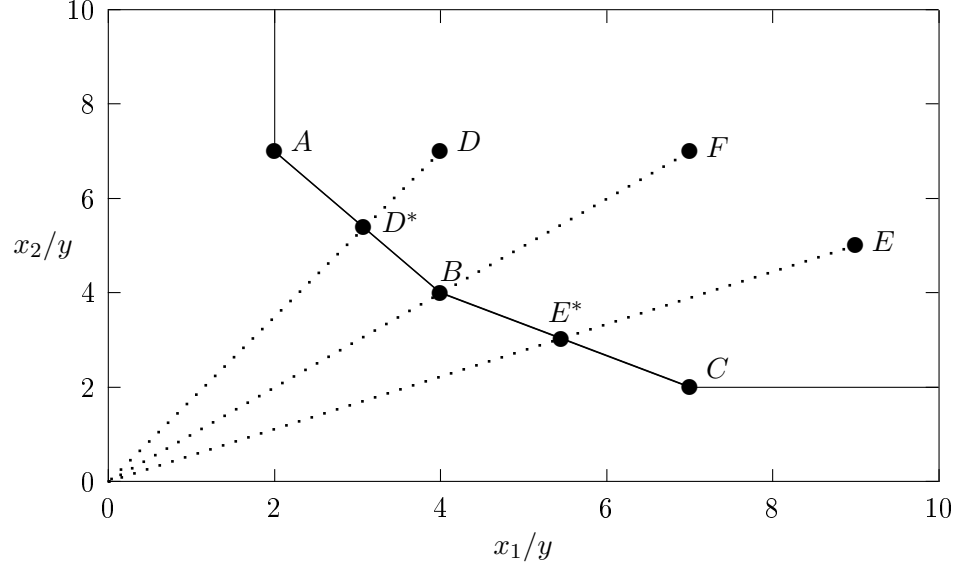
Böylece, etkinsiz olan karar birimi k 'ya baskın ve görelî tam etkin olan hipotetik bir karar biriminin tanımlanması düal değişkenler yardımıyla yapılabilmektedir. Bu hipotetik karar birimi, karar birimi k 'nin referans kümesinde yer alan etkin karar birimlerinin doğrusal bir kombinasyonudur. Referans kümesinde bulunan etkin karar birimleri, karar birimi k için rol modelleri oluştururken, hipotetik karar birimi κ , karar birimi k 'nin taklit etmesi gereken tek bir noktayı temsil etmektedir. Karar birimi k 'nin κ gibi olmaya çalışma sürecinde tüm girdi faktörlerini $\%(1 - \theta_k) * 100$ ($\nu_{ik} = 0$ olan girdi faktörleri için daha fazla) azaltması ve $\mu_{rk} = 0$ olan çıktı faktörleri için artırması gerekmektedir. Karar birimi k 'nin sonsuz farklı şekilde etkin sınıra ulaşma yolu vardır. Ancak, hipotetik karar birimini taklit ederse girdi faktörlerinin hiçbirinde artışa ve çıktı faktörlerinin hiçbirinde azalışa gerek kalmadan etkin sınıra ulaşmış olacaktır.

3.5.4 Örnek

Bu kısımda girdiye yönelik *çarpan modeli* (M_I) ve girdiye yönelik *zarflama modeli* (E_I) ile ilgili bir örnek verilmiştir. Ayrıca, örnekte etkinsiz olarak değerlendirilen karar birimlerinin *referans kümeleri* belirlenmiş ve etkinsizliği gidermeye yönelik olarak rol modelleri tanımlanmıştır.

A , B , C , D , E , F karar birimlerine ilişkin veri Tablo 3.3 olarak verilmiştir.

Karar birimleri için ölçeğe göre sabit getiri varsayımı altında çizilen etkin sınır ise Şekil 3.1 olarak sunulmuştur. Bu şekilden görüleceği üzere,

Şekil 3.1: Örnek $M_I - E_I$

A, B, C karar birimleri etkin sınırı oluştururken, karar birimleri D, E, F etkin sınırın içinde kalmaktadır. Daha önce ayrıntılı olarak incelenen bu durum, D, E, F karar birimlerinin toplam etkinlik skorlarının 1.0'ın altında olduğuna işaret etmektedir. Etkinsiz olan karar birimlerinin skorları grafik yardımıyla bulunabilse de, burada önceki kısımda tanımlanan çarpan ve zarflama modellerinden faydalanılacaktır. Bilindiği gibi, grafik yardımıyla çözülebilecek olan en büyük etkinlik analiz problemi tek girdi/iki çıktı veya iki çıktı/tek girdi faktörlü problemlerdir. Buna karşın, doğrusal programlama tabanlı etkinlik analizinde faktör sayısı üzerinde bir kısıt bulunmamaktadır. Teorik olarak istendiği kadar fazla kısıtın modele dahil edilmesi mümkündür.

Etkinlik analizleri yapılacak karar birimlerine ilişkin verilen veri çerçevesinde oluşturulan girdiye yönelik *çarpan modelleri* sırayla aşağıda verilmiştir. M_I modellerinden açıkça görüldüğü üzere, amaç fonksiyon ve konvekslik kısıtı $\left(\sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ik} = 1\right)$ haricinde kalan kısım, diğer bir deyişle modellerin analiz edilen karar birimi sayısını gösteren N tane kısıtı, aynıdır.

Karar Birimi A

$$\begin{aligned}
& \max 10\mu \\
& \text{st} \\
& 10\mu - 20\nu_1 - 70\nu_2 \leq 0 \\
& 20\mu - 80\nu_1 - 80\nu_2 \leq 0 \\
& 5\mu - 35\nu_1 - 10\nu_2 \leq 0 \\
& 7\mu - 28\nu_1 - 49\nu_2 \leq 0 \\
& 3\mu - 27\nu_1 - 15\nu_2 \leq 0 \\
& 6\mu - 42\nu_1 - 42\nu_2 \leq 0 \\
& 20\nu_1 + 70\nu_2 = 1 \\
& \mu, \nu_1, \nu_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Karar Birimi B

$$\begin{aligned}
& \max 20\mu \\
& \text{st} \\
& 10\mu - 20\nu_1 - 70\nu_2 \leq 0 \\
& 20\mu - 80\nu_1 - 80\nu_2 \leq 0 \\
& 5\mu - 35\nu_1 - 10\nu_2 \leq 0 \\
& 7\mu - 28\nu_1 - 49\nu_2 \leq 0 \\
& 3\mu - 27\nu_1 - 15\nu_2 \leq 0 \\
& 6\mu - 42\nu_1 - 42\nu_2 \leq 0 \\
& 80\nu_1 + 80\nu_2 = 1 \\
& \mu, \nu_1, \nu_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Karar Birimi C

$$\begin{aligned}
& \max 5\mu \\
& \text{st} \\
& 10\mu - 20\nu_1 - 70\nu_2 \leq 0 \\
& 20\mu - 80\nu_1 - 80\nu_2 \leq 0 \\
& 5\mu - 35\nu_1 - 10\nu_2 \leq 0 \\
& 7\mu - 28\nu_1 - 49\nu_2 \leq 0 \\
& 3\mu - 27\nu_1 - 15\nu_2 \leq 0 \\
& 6\mu - 42\nu_1 - 42\nu_2 \leq 0 \\
& 35\nu_1 + 10\nu_2 = 1 \\
& \mu, \nu_1, \nu_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Karar Birimi D

$$\begin{aligned}
& \max 7\mu \\
& \text{st} \\
& 10\mu - 20\nu_1 - 70\nu_2 \leq 0 \\
& 20\mu - 80\nu_1 - 80\nu_2 \leq 0 \\
& 5\mu - 35\nu_1 - 10\nu_2 \leq 0 \\
& 7\mu - 28\nu_1 - 49\nu_2 \leq 0 \\
& 3\mu - 27\nu_1 - 15\nu_2 \leq 0 \\
& 6\mu - 42\nu_1 - 42\nu_2 \leq 0 \\
& 28\nu_1 + 49\nu_2 = 1 \\
& \mu, \nu_1, \nu_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Karar Birimi E

$$\begin{aligned}
& \max 3\mu \\
& \text{st} \\
& 10\mu - 20\nu_1 - 70\nu_2 \leq 0 \\
& 20\mu - 80\nu_1 - 80\nu_2 \leq 0 \\
& 5\mu - 35\nu_1 - 10\nu_2 \leq 0 \\
& 7\mu - 28\nu_1 - 49\nu_2 \leq 0 \\
& 3\mu - 27\nu_1 - 15\nu_2 \leq 0 \\
& 6\mu - 42\nu_1 - 42\nu_2 \leq 0 \\
& 27\nu_1 + 15\nu_2 = 1 \\
& \mu, \nu_1, \nu_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Karar Birimi F

$$\begin{aligned}
& \max 6\mu \\
& \text{st} \\
& 10\mu - 20\nu_1 - 70\nu_2 \leq 0 \\
& 20\mu - 80\nu_1 - 80\nu_2 \leq 0 \\
& 5\mu - 35\nu_1 - 10\nu_2 \leq 0 \\
& 7\mu - 28\nu_1 - 49\nu_2 \leq 0 \\
& 3\mu - 27\nu_1 - 15\nu_2 \leq 0 \\
& 6\mu - 42\nu_1 - 42\nu_2 \leq 0 \\
& 42\nu_1 + 42\nu_2 = 1 \\
& \mu, \nu_1, \nu_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Yukarıda verilen M_I modellerinin LINDO¹ matematiksel programlama çözücü paket programıyla bulunan çözümünü Tablo 3.4 ve 3.5 olarak

¹LINDO (LINear Discrete Optimizer) model çözücü ile ilgili ayrıntılı bilgi www.lindo.com adresinden temin edilebilir. Ayrıca bu adresten LINDO'nun değişikken

DMU	τ^*	μ^*	ν_1^*	ν_2^*
A	1.00	0.1000	0.0500	0.0000
B	1.00	0.0500	0.0075	0.0050
C	1.00	0.2000	0.0200	0.0300
D	0.77	0.1099	0.0165	0.0110
E	0.61	0.2020	0.0202	0.0303
F	0.57	0.0952	0.0095	0.0143

Tablo 3.4: M_I Örneği için $\tau^*, \mu^*, \nu_1^*, \nu_2^*$

verilmiştir.

Kullanılan notasyonda τ^* toplam etkinlik skorunu, μ^* çıktı faktörüne verilen optimum ağırlığı, ν_1^* ve ν_2^* girdi faktörlerinin optimum ağırlıklarını göstermektedir.

Tablo 3.4, τ^* sütunundan görüldüğü üzere, ve beklendiği gibi, A, B, C karar birimleri toplam etkindirler. Etkinsiz olmaları beklenen D, E, F karar birimleri de etkinsiz bulunmuştur. Etkinsizlerin skorları ise $\tau_D^* = 0.77$, $\tau_E^* = 0.61$ ve $\tau_F^* = 0.57$ 'dir. τ^* sütununu takiben maksimum toplam faktör verimliliği skoruna ulaşmak için kullanılan faktör ağırlıkları μ , ν_1 ve ν_2 'nin optimal değerleri verilmiştir. Tablo 3.5, LINDO paket programının çözüm kümesinde verdiği diğer sonuçları tablolamaktadır. Tabloda görülen düal değişkenler aslında çarpan modelin düali olan zarflama modelinin çözümü sonucu elde edilecek olan λ düal değişkenlerinin değerleridir. λ_i ve s_i , sırasıyla, çarpan modelin i . kısıtına karşılık gelen düal ve aylak değişkendir.

Tablo 3.3 ile tanımlanan örnek, M_I modelleri yardımıyla çözülmüştür. Aynı örnek, bu noktada girdiye yönelik zarflama modeli olan E_I ile çözülecek ve ilgili sonuçlar tablolar yardımıyla verilecektir.

Etkinlik analizleri yapılacak karar birimlerine ilişkin verilen veri çerçevesinde oluşturulan girdiye yönelik *zarflama modelleri* aşağıda verilmiştir. Modellerde kullanılan θ *urs* ifadesi θ 'nın sınırsız olduğunu göstermektedir.

Karar Birimi A

sayısı 500, kısıt sayısı 250, eğitim amaçlı kullanımı serbest olan sürümünü indirmek mümkündür. Bu bilgiler 1.Şubat.2001 tarihi itibarıyla geçerlidir.

DMU	Düal (λ) ve Aylak (s) Değişkenler					
	λ_1 s_1	λ_2 s_2	λ_3 s_3	λ_4 s_4	λ_5 s_5	λ_6 s_6
<i>A</i>	1.0000 0.0000	0.0000 2.0000	0.0000 1.2500	0.0000 0.7000	0.0000 1.0500	0.0000 1.5000
<i>B</i>	0.0000 0.0000	1.0000 0.0000	0.0000 0.0625	0.0000 0.1050	0.0000 0.1275	0.0000 0.2250
<i>C</i>	0.0000 0.5000	0.0000 0.0000	1.0000 0.0000	0.0000 0.6300	0.0000 0.3900	0.0000 0.9000
<i>D</i>	0.3231 0.0000	0.1885 0.0000	0.0000 0.1374	0.0000 0.2308	0.0000 0.2802	0.0000 0.4945
<i>E</i>	0.0000 0.5051	0.0773 0.0000	0.2909 0.0000	0.0000 0.6364	0.0000 0.3939	0.0000 0.9091
<i>F</i>	0.0000 0.2381	0.3000 0.0000	0.0000 0.0000	0.0000 0.3000	0.0000 0.1857	0.0000 0.4286

Tablo 3.5: M_I Örneği, Düal ve Aylak Değişkenler

$\min \theta$
 st
 $10 \lambda_1 + 20 \lambda_2 + 5 \lambda_3 + 7 \lambda_4 + 3 \lambda_5 + 6 \lambda_6 \geq 10$
 $20 \theta - 20 \lambda_1 - 80 \lambda_2 - 35 \lambda_3 - 28 \lambda_4 - 27 \lambda_5 - 42 \lambda_6 \geq 0$
 $70 \theta - 70 \lambda_1 - 80 \lambda_2 - 10 \lambda_3 - 49 \lambda_4 - 15 \lambda_5 - 42 \lambda_6 \geq 0$
 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0$
 θ *urs*

Karar Birimi B

$\min \theta$
 st
 $10 \lambda_1 + 20 \lambda_2 + 5 \lambda_3 + 7 \lambda_4 + 3 \lambda_5 + 6 \lambda_6 \geq 20$
 $80 \theta - 20 \lambda_1 - 80 \lambda_2 - 35 \lambda_3 - 28 \lambda_4 - 27 \lambda_5 - 42 \lambda_6 \geq 0$
 $80 \theta - 70 \lambda_1 - 80 \lambda_2 - 10 \lambda_3 - 49 \lambda_4 - 15 \lambda_5 - 42 \lambda_6 \geq 0$
 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \geq 0$
 θ *urs*

Karar Birimi C

$\min \theta$
 st

$$\begin{aligned}
10 \lambda_1 + 20 \lambda_2 + 5 \lambda_3 + 7 \lambda_4 + 3 \lambda_5 + 6 \lambda_6 &\geq 5 \\
35 \theta - 20 \lambda_1 - 80 \lambda_2 - 35 \lambda_3 - 28 \lambda_4 - 27 \lambda_5 - 42 \lambda_6 &\geq 0 \\
10 \theta - 70 \lambda_1 - 80 \lambda_2 - 10 \lambda_3 - 49 \lambda_4 - 15 \lambda_5 - 42 \lambda_6 &\geq 0 \\
\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 &\geq 0 \\
\theta &urs
\end{aligned}$$

Karar Birimi D

$$\begin{aligned}
\min \theta \\
\text{st} \\
10 \lambda_1 + 20 \lambda_2 + 5 \lambda_3 + 7 \lambda_4 + 3 \lambda_5 + 6 \lambda_6 &\geq 7 \\
28 \theta - 20 \lambda_1 - 80 \lambda_2 - 35 \lambda_3 - 28 \lambda_4 - 27 \lambda_5 - 42 \lambda_6 &\geq 0 \\
49 \theta - 70 \lambda_1 - 80 \lambda_2 - 10 \lambda_3 - 49 \lambda_4 - 15 \lambda_5 - 42 \lambda_6 &\geq 0 \\
\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 &\geq 0 \\
\theta &urs
\end{aligned}$$

Karar Birimi E

$$\begin{aligned}
\min \theta \\
\text{st} \\
10 \lambda_1 + 20 \lambda_2 + 5 \lambda_3 + 7 \lambda_4 + 3 \lambda_5 + 6 \lambda_6 &\geq 3 \\
27 \theta - 20 \lambda_1 - 80 \lambda_2 - 35 \lambda_3 - 28 \lambda_4 - 27 \lambda_5 - 42 \lambda_6 &\geq 0 \\
15 \theta - 70 \lambda_1 - 80 \lambda_2 - 10 \lambda_3 - 49 \lambda_4 - 15 \lambda_5 - 42 \lambda_6 &\geq 0 \\
\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 &\geq 0 \\
\theta &urs
\end{aligned}$$

Karar Birimi F

$$\begin{aligned}
\min \theta \\
\text{st} \\
10 \lambda_1 + 20 \lambda_2 + 5 \lambda_3 + 7 \lambda_4 + 3 \lambda_5 + 6 \lambda_6 &\geq 6 \\
42 \theta - 20 \lambda_1 - 80 \lambda_2 - 35 \lambda_3 - 28 \lambda_4 - 27 \lambda_5 - 42 \lambda_6 &\geq 0 \\
42 \theta - 70 \lambda_1 - 80 \lambda_2 - 10 \lambda_3 - 49 \lambda_4 - 15 \lambda_5 - 42 \lambda_6 &\geq 0 \\
\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 &\geq 0 \\
\theta &urs
\end{aligned}$$

Yukarıda verilen M_I modellerinin LINDO matematiksel programlama çözücü paket programıyla bulunan çözümünü Tablo 3.6 ve 3.7 olarak verilmiştir.

Beklendiği gibi, A , B , C toplam etkin bulunurken, D , E , F etkinsiz olarak değerlendirilmiştir. Tablo 3.6, λ sütunları incelendiğinde etkin karar birimlerinin sadece kendilerine ait olan λ değişkenlerinin değerlerinin 1.0 olduğu görülür. Etkin olmayan karar birimlerinin λ değişkenleri 0.0 değerini almakta, fakat bazı etkin karar birimlerine ilişkin λ değerleri

DMU	$\tau = \theta$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
<i>A</i>	1.00	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<i>B</i>	1.00	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<i>C</i>	1.00	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<i>D</i>	0.77	0.3231	0.1885	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
<i>E</i>	0.61	0.0000	0.0773	0.2910	0.0000	0.0000	0.0000
<i>F</i>	0.57	0.0000	0.3000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Tablo 3.6: E_I Örneği için τ, λ_i

pozitif olmaktadır. Etkin olmayan D için λ_A ve λ_B , E için λ_B ve λ_C , F için ise sadece λ_B değişkenleri pozitif değer almıştır. Böylece,

- D için referans kümesi $\{A, B\}$,
- E için referans kümesi $\{B, C\}$,
- F için referans kümesi $\{B\}$,

olarak bulunur.

LINDO ile çözülen model E_I 'nin çözümünden elde edilen düal değişkenlerin ve optimum değerleri Tablo 3.7 olarak sunulmuştur. Primal modelin, düalinin düali orijinal primal modele eş olacağı için bu tabloda verilen düal değişkenlerin değerleri esasında primal modelin değişkenleri olan μ, ν_1 ve ν_2 'dur. Referans kolaylığı açısından, zarflama modelinin çözümünden elde edilen düal değişkenler μ', ν'_1 ve ν'_2 olarak tanımlanmıştır.

Eğer Tablo 3.4 ile 3.7 karşılaştırılırsa karar birimi A haricindekiler için değerlerin aynı olduğu görülür. A için ortaya çıkan fark, bu karar birimi için alternatif optimal çözümlerin olduğunu göstermektedir. A için kurulmuş olan M_I modeline $\nu_1 = 0.0150$ olma koşulu eklenmiş ve model tekrar çözülmüştür.

$$\begin{aligned}
& \max 10\mu \\
& \text{st} \\
& \nu_1 = 0.0150 \\
& 10\mu - 20\nu_1 - 70\nu_2 \leq 0 \\
& 20\mu - 80\nu_1 - 80\nu_2 \leq 0
\end{aligned}$$

DMU	Düal Değişken μ', ν_1', ν_2'		
	μ'	ν_1'	ν_2'
A	0.1000	0.0150	0.0100
B	0.0500	0.0075	0.0050
C	0.2000	0.0200	0.0300
D	0.1099	0.0165	0.0110
E	0.2020	0.0202	0.0303
F	0.0952	0.0095	0.0143

Tablo 3.7: E_I Örneği, Düal Değişkenler

	A	B	C				
X_1	20.0	80.0	35.0				
X_2	70.0	80.0	10.0				
Y	10.0	20.0	5.0		X_1	X_2	Y
D_λ	0.3231	0.1885	0.0000	D^*	21.54	37.70	7
E_λ	0.0000	0.0773	0.2910	E^*	16.36	9.09	3
F_λ	0.0000	0.3000	0.0000	F^*	24.00	24.00	6

Tablo 3.8: Rol Modelleri

$$5 \mu - 35 \nu_1 - 10 \nu_2 \leq 0$$

$$7 \mu - 28 \nu_1 - 49 \nu_2 \leq 0$$

$$3 \mu - 27 \nu_1 - 15 \nu_2 \leq 0$$

$$6 \mu - 42 \nu_1 - 42 \nu_2 \leq 0$$

$$20 \nu_1 + 70 \nu_2 = 1$$

$$\mu, \nu_1, \nu_2 \geq 0$$

Ek kısıtlı modelin karar değişkenlerinin optimal değerleri $\mu = 0.10$ ve $\nu_2 = 0.01$ olarak bulunmuştur. Bu yeni çözümde ağırlık değerlerinin değişmiş olmasına rağmen etkinlik skoru değişmemiş, 1.0 olarak kalmıştır.

E_I zarflama modelinin karar değişkenleri olan λ değişkenlerinin optimal değerleri kullanılarak, etkin olmayan karar birimleri için rol modellerinin oluşturulabileceği daha önce gösterilmişti. Bu noktada, etkisiz olan D , E , F karar birimleri için oluşturulan rol modelleri Tablo 3.8 kapsamında verilmiştir.

	D	A	B	$D^* = \lambda_A * A + \lambda_B * B$	$(D - D^*)/D$
X_1	28	20	80	21.54	%23
X_1	49	70	80	37.70	%23
Y	7	10	20	7.00	%0

Tablo 3.9: Karar Birimi D için Rol Modeli

	X_1	X_2	Y			
D	28	49	7			
E	27	15	3			
F	42	42	6			
	X_1	X_2	Y			
D^*	21.54	37.70	7	Δ_D	%23	%23
E^*	16.36	9.09	3	Δ_E	%39	%39
F^*	24.00	24.00	6	Δ_F	%43	%43

Tablo 3.10: Girdi Azalış - Çıktı Artış Miktarları

A , B ve C sütunlarının ilk üç satırı ilgili karar birimlerinin kullandıkları girdi miktarlarını ve ürettikleri çıktı miktarını göstermektedir. İzleyen üç satır, etkinsiz olan D , E ve F karar birimlerinin E_I sonucu bulunan pozitif düal değişkenlerinin değerlerini göstermektedir. Bu düal değişkenler yardımıyla rol modelleri tanımlanmaktadır. Eğer bir örnek vermek gerekirse: Etkinsiz olan D 'nin pozitif düal değişkenleri λ_A ve λ_B , sırasıyla 0.3231 ve 0.1885 değerini almıştır. Sadece D karar biriminin rol modelinin tanımlanmasına ilişkin hesaplamalar ayrıntılı olarak Tablo 3.9 ile verilmiştir.

Karar birimi D için tanımlanan rol modelinin, D^* , iki önemli özelliği bulunmaktadır. Girdi faktörlerinden daha az kullanmakta ve en az D kadar üretmektedir. Bu özellikleri dolayısıyla D^* , D için rol modelidir. Etkinsiz olan karar birimleri D , E , F için hesaplanan girdi miktarlarındaki yüzde azalış ve çıktı miktarındaki yüzde artış Tablo 3.10 olarak verilmiştir.

3.6 Arşimedgil Olmayan Modeller

Bu kısımda, §3.5 kapsamında ayrıntılı olarak incelenen girdiye ve çıktıya yönelik çarpan ve zarflama modellerinin Arşimedgil olmayan formdaki ifadeleri verilecektir. Daha önce tanımlanan notasyon ışığında, model adlarına eklenen ϵ , ilgili modelin Arşimedgil olmadığını gösterecektir. İlk olarak girdiye yönelik kesirli programlama modeli TFP_I^ϵ , çarpan modeli M_I^ϵ ve zarflama modeli E_I^ϵ verilmiştir. Bunu takiben, önceki kısımda verilen örneğe dahil edilen bir karar birimi üzerinden Arşimedgil olmayan modellerin işlevi açıklanmıştır. Ardından, çıktıya yönelik modeller, girdiye yönelik olan modeller ile aynı sırada sunulmuştur.

Toplam faktör verimliliğinden hareketle tanımlanmış olan kesirli programlama modelinin ağırlıklarının 0'dan büyük olması gerektiği koşulu Charnes, Cooper ve Rhodes [41] tarafından ifade edilmiştir. Bu çerçevede, girdiye yönelik kesirli programlama modeli şöyle ifade edilir:

Model TFP_I^ϵ :

max

$$h_k = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ik}} \quad (3.86)$$

s.t.

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.87)$$

$$u_{rk} \geq \epsilon, \quad v_{ik} \geq \epsilon \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \quad (3.88)$$

Kesirli programlama modelinin doğrusal programlama modeline indirgenmesini sağlayan dönüşümlerin tümü Arşimedgil olmayan büyüklüğün modele dahil edilmesi halinde de geçerlidir. Bunun sonucu olarak M_I modelinde değiştirilmesi gereken tek unsur faktör ağırlıklarının sıfırdan büyük olma koşuludur. Bu koşulun eklenmesiyle M_I^ϵ tanımlanmış olur. Daha önce bahsedildiği üzere, pratikte ϵ , 10^{-6} gibi küçük bir değer

almaktadır.

Model M_I^ϵ :

max

$$\phi_k = \sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rk} \quad (3.89)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ik} = 1 \quad (3.90)$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.91)$$

$$\mu_{rk} \geq \epsilon, \quad \nu_{ik} \geq \epsilon \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \quad (3.92)$$

Çarpan modeli olan M_I^ϵ modelinin düali olan E_I^ϵ modeli E_I 'ye kıyasla daha karmaşık görünse de ifadeler kolaylıkla yorumlanabilir. Belirtildiği üzere, bir karar biriminin etkinlik skorunun 1.0 bulunmasının bu karar biriminin etkin olarak değerlendirilmesi için yeterli olmadığı, ve aylak değişkenlerin de sifıra eşit olduklarının kontrol edilmesi gerekmektedir. Bu konuyla ilgili olarak ayrıntılı açıklama için s.58 incelenebilir.

Aşağıda verilmiş olan E_I^ϵ modelinin amaç fonksiyonunda, E_I 'den farklı olarak $-\epsilon \left[\sum_{i=1}^m s_{ik} + \sum_{r=1}^s s'_{rk} \right]$ terimi yer almaktadır. Eğer negatif olmayan aylak değişkenlerin toplamı sıfırdan büyük ise, bunun sonucunda etkinlik skorunu veren θ maksimum değeri olan 1.0'a ulaşsa dahi, toplam terimi $-\epsilon$ ile çarpıldığı için etkinlik skoru 1.0'ın altına inecektir. Amaç fonksiyonunun değerinin 1.0'ın altında gözlenmesi ise ilgili karar birimi için etkinsizlik değerlendirmesi yapılmasına yol açacaktır.

Böylece etkinlik tanımında verilen, etkinlik skorunun 1.0 olması ve aynı zamanda aylak değişkenlerin değerlerinin sıfır olması koşulu amaç

fonksiyonda ifadesini bulmaktadır:

$$\text{Model } E_I^e : \quad \min \quad (3.93)$$

$$\theta_k - \epsilon \left[\sum_{i=1}^m s_{ik} + \sum_{r=1}^s s'_{rk} \right] \quad (3.94)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} - s'_{rk} = Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.95)$$

$$\theta_k X_{ik} - \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} - s_{ik} = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.96)$$

$$\lambda_{jk}, s_{ik}, s'_{rk} \geq 0 \quad \forall i, j, r \quad (3.97)$$

E_I^e modeline bir örnek olması için daha önce s.69'da verilen problem, yeni bir karar birimi eklenerek yeniden incelenecektir. Yeni tanımlanan karar birimi P , X_1 ve X_2 girdilerinden sırasıyla 20 ve 90 birim kullanmakta ve Y çıktısından 10 birim üretmektedir. Probleme ilişkin grafik Şekil 3.2 olarak verilmiştir.

Şekil incelendiğinde P karar biriminin etkin olmadığı açıkça görülmektedir. Çünkü, karar birimi P , A ile kıyaslandığında aynı miktarda X_1 girdisi kullanmakta, aynı miktarda üretmekte, fakat X_2 girdisinden daha fazla tüketmektedir. *Ceteris paribus*, P 'nin X_2 girdisinden daha fazla tüketmesi etkinsizlik göstergesidir. Bu duruma ilişkin E_I modeli tanımlanıp

Karar Birimi P

min θ

st

$$10 \lambda_1 + 20 \lambda_2 + 5 \lambda_3 + 7 \lambda_4 + 3 \lambda_5 + 6 \lambda_6 + 10 \lambda_7 \geq 10$$

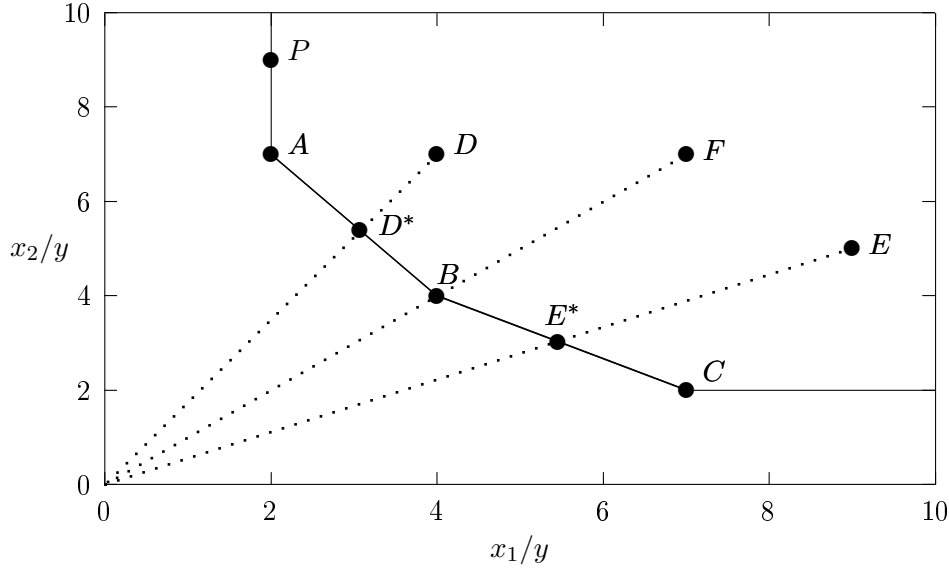
$$20 \theta - 20 \lambda_1 - 80 \lambda_2 - 35 \lambda_3 - 28 \lambda_4 - 27 \lambda_5 - 42 \lambda_6 - 20 \lambda_7 \geq 0$$

$$90 \theta - 70 \lambda_1 - 80 \lambda_2 - 10 \lambda_3 - 49 \lambda_4 - 15 \lambda_5 - 42 \lambda_6 - 90 \lambda_7 \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7 \geq 0$$

θ urs

çözüldüğünde etkinlik skoru 1.0 bulunmuştur. Çözümde elde edilen optimal aylak değişken değerlerine bakıldığında ilk ve ikinci eşitsizliğe

Şekil 3.2: Örnek E_I^c

karşılık gelen aylak değişkenlerin sıfır değerini aldığı, ancak üçüncü eşitsizliğe karşılık gelen aylak değişkenin değerinin 20 olduğu görülür. Böylece, karar birimi P 'nin ikinci girdi kısıtının karşılık geldiği X_2 girdisini israf ettiği ve israf edilen miktarın da 20 birim olduğu ortaya çıkar.

Ancak, aylak değişken değerlerine bakarak sonuca gitmek yanıltıcı olabilir. Eğer, bahsedilen modelin ikinci girdi, X_2 , kısıtına ait aylak değişken s_2 ile gösterilirse, ifade açık halde şöyle yazılır:

$$90\theta - 70\lambda_1 - 80\lambda_2 - 10\lambda_3 - 49\lambda_4 - 15\lambda_5 - 42\lambda_6 - 90\lambda_7 - s_2 = 0$$

Modele $s_2 = 0$ kısıtı eklendiğinde sonuç değişmemekte ve etkinlik skoru yine 1.0 bulunmaktadır. Yani, yukarıda 20 olarak bulunduğu belirtilen aylak değişken değerinin sıfır olarak gözlenmesi de mümkündür. Aylak değişkenin değerinin sıfır olduğu bu alternatif çözümün gözlenmiş olması halinde, bulunmuş olan 1.0 etkinlik skoruyla birlikte, yanlış bir değerlendirme (P "görel olarak tam etkindir" değerlendirmesi) için zemin hazırlanmış olur. Bu tür sakıncaları ortadan kaldırmak üzere Arşimedgil olmayan modellerden faydalanılmalıdır.

Aynı problem E_I^ϵ model formu kullanılarak $\epsilon = 0.0001$ değeri için kurulmuş

Karar Birimi P

$$\min \theta - \epsilon s_1 - \epsilon s_2 - \epsilon s'$$

st

$$10 \lambda_1 + 20 \lambda_2 + 5 \lambda_3 + 7 \lambda_4 + 3 \lambda_5 + 6 \lambda_6 + 10 \lambda_7 - s' = 10$$

$$20 \theta - 20 \lambda_1 - 80 \lambda_2 - 35 \lambda_3 - 28 \lambda_4 - 27 \lambda_5 - 42 \lambda_6 - 20 \lambda_7 - s_1 = 0$$

$$90 \theta - 70 \lambda_1 - 80 \lambda_2 - 10 \lambda_3 - 49 \lambda_4 - 15 \lambda_5 - 42 \lambda_6 - 90 \lambda_7 - s_2 = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, s', s_1, s_2 \geq 0$$

θ urs

ve çözüm alınmıştır. Elde edilen çözümde etkinlik skoru %99.8'dir. Böylece, Arşimedgil olmayan modellerin işlevi kendiliğinden ortaya çıkmakta, ve etkinlik skoru, aylak değişkenlerin pozitif değer alabilmeleri halinde 1.0'ın altında kalmaktadır.

Arşimedgil olmayan büyüklük ϵ 'a *a priori* olarak değer verilmesinin yaratacağı sakıncalardan arınmak üzere iki aşamalı bir yaklaşım kullanılabilir. Bu süreçte, ilk adımda E_I modeli çözülerek etkinlik skoru olan θ_k hesaplanır. Eğer, $\theta_k = 1.0$ bulunursa, ikinci aşamada $\theta_k = 1.0$ alınarak sadece aylak değişken değerlerinin toplamını maksimize etmeye çalışacak olan bir yeni model kurulur:

$$\max \quad (3.99)$$

$$\sum_{i=1}^m s_{ik} + \sum_{r=1}^s s'_{rk} \quad (3.100)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} - s'_{rk} = Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.101)$$

$$X_{ik} - \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} - s_{ik} = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.102)$$

$$\lambda_{jk}, s_{ik}, s'_{rk} \geq 0 \quad \forall i, j, r \quad (3.103)$$

Bu maksimizasyon tipindeki modelin optimum çözüm değeri sıfır ise bunun anlamı aylak değişkenlerin alabilecekleri en yüksek değerin sıfır olduğu ve dolayısıyla karar birimi k 'nın etkin bir karar birimi olduğudur. Aksi halde, amaç fonksiyonun değeri toplam aylak miktarını verecektir

ve dolayısıyla etkinlik skoru $\theta_k = 1.0$ olmasına rağmen karar biriminin etkin olmadığı anlaşılacaktır.

Bu noktada yukarıda incelenen örnekte yer alan karar birimi P iki aşamalı yöntemle değerlendirilecektir. İlk adımda etkinlik skoru 1.0 bulunmuştur. İkinci adımda

$$\begin{aligned} & \max s_1 + s_2 + s' \\ & \text{st} \\ & 10 \lambda_1 + 20 \lambda_2 + 5 \lambda_3 + 7 \lambda_4 + 3 \lambda_5 + 6 \lambda_6 + 10 \lambda_7 - s' = 10 \\ & 20 \lambda_1 + 80 \lambda_2 + 35 \lambda_3 + 28 \lambda_4 + 27 \lambda_5 + 42 \lambda_6 + 20 \lambda_7 + s_1 = 20 \\ & 70 \lambda_1 + 80 \lambda_2 + 10 \lambda_3 + 49 \lambda_4 + 15 \lambda_5 + 42 \lambda_6 + 90 \lambda_7 + s_2 = 90 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, s', s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

modeli kurulur. Modelin optimal çözümü $s_1 = 0.0$, $s_2 = 20.0$ ve $s' = 0.0$ verir. Açıkça görüldüğü gibi, P için etkinlik skoru 1.0 olarak bulunmuş olmasına rağmen X_2 girdi faktörü çıktı miktarında azalmaya yol açmadan azaltılabilmektedir. Dolayısıyla, P görelî tam etkin değildir.

Çıktıya yönelik olan Arşimedgil olmayan kesirli programlama modeli, çarpan modeli ve zarflama modeli aşağıda verilmiştir. Bu modellere ilişkin yorumlar girdiye yönelik olarak kurulan modellerin ki ile aynıdır.

İlk olarak Arşimedgil olmayan kesirli programlama modeli verilmiştir.

Model TFP_O^ϵ :

min

$$f_k = \frac{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ik}}{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rk}} \quad (3.104)$$

s.t.

$$\frac{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rj}} \geq 1 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.105)$$

$$u_{rk} \geq \epsilon, \quad v_{ik} \geq \epsilon \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \quad (3.106)$$

Arşimedgil olmayan çıktıya yönelik çarpan modeli şöyledir:

Model M_O^ϵ :

min

$$g_k = \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ik} \quad (3.107)$$

s.t.

$$-\sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rj} + \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ij} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.108)$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rk} = 1 \quad (3.109)$$

$$\mu_{rk} \geq \epsilon, \nu_{ik} \geq \epsilon \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \quad (3.110)$$

Son olarak çıktıya yönelik zarflama modeli sunulmuştur:

Model E_O^ϵ :

max (3.111)

$$z_k + \epsilon \left[\sum_{i=1}^m s_{ik} + \sum_{r=1}^s s'_{rk} \right] \quad (3.112)$$

s.t.

$$-\sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} + Y_{rk} z_k + s'_{rk} = 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.113)$$

$$\sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} - X_{ik} + s_{ik} = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.114)$$

$$\lambda_{jk}, s_{ik}, s'_{rk} \geq 0 \quad \forall i, j, r \quad (3.115)$$

Bölüm 4

DEA ve Teknik-Ölçek Etkinliği

Bu bölümde Banker, Charnes ve Cooper'ın [13] çalışmaları çerçevesinde ölçeğe göre getirinin yönünün belirlenmesi ile ilgili sonuçlar verilmiştir. Bu sonuçlar sayesinde çok-girdi çok-çıkıtı durumunda teknik ve ölçek etkinliklerinin ayrı ayrı ölçümü matematiksel programlama yardımıyla gerçekleştirilecektir. Bunu takiben ilk olarak, çok-girdi çok-çıkıtı durumu için ölçeğe göre getiri kavramı genelleştirilmiştir. Bununla ilişkili olarak, tanımlanan üretim süreci için ölçeğe göre getiri ve en verimli ölçek büyüklüğü (MPSS) arasındaki ilişki, Banker'ın [6] kapsamında, ortaya konmuştur. Ardından, üretim imkanları kümesinin konveks olduğu durumda, en verimli ölçek büyüklüğünü belirlemek üzere CCR modelinin nasıl kullanılabileceği konusunu ele alınmıştır.

4.1 Shephard Uzaklık Fonksiyonu ve CCR Etkinliği

Bu kısımda, Banker, Charnes ve Cooper'ın [13] çalışmasında incelendiği şekilde karar birimi k , (\vec{x}_k, \vec{y}_k) , için teknik etkinlik ve ölçeğe göre getirinin yönü belirlenecektir.

Bu bağlamda ilk olarak Shephard [121] izlenerek mümkün girdi ve mümkün çıktı kümeleri tanımlanmıştır. \vec{y} çıktı vektörü için mümkün

girdi kümesi $L(\vec{y}) = \{\vec{x} | (\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega\}$, \vec{x} girdi vektörü için mümkün çıktı kümesi $P(\vec{x}) = \{\vec{y} | (\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega\}$ ile gösterilmiştir.

Üretim imkanları kümesi, Ω , Postulat (2.1)-(2.9) çerçevesinde tanımlanmıştır. Bu tanımlamada Postulat (2.5) *konvekslik postulatı*, Postulat (2.3)-(2.4) *etkinsizlik postulatı*, Postulat (2.6)-(2.7) *ölçeğe göre sabit getiri postulatı* (Ray Unboundedness) ve Postulat (2.8)-(2.9) *minimum ekstrapolasyon postulatı* (Minimum Extrapolation) olarak adlandırılmaktadır. Ekonomi yazınında etkinsizlik postulatı yerine kimi zaman "Free Disposability" terimi kullanılmaktadır. Bu terim ilk defa Koopmans [89] tarafından kullanılmıştır.

Konvekslik ve ölçeğe göre sabit getiri postulatları

$$\left(\xi \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j \vec{x}_j, \xi \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j \vec{y}_j \right), \quad \xi > 0, \quad \bar{\lambda}_j \geq 0$$

ve

$$\sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j = 1$$

ifadelerini sağlayan tüm (\vec{x}, \vec{y}) 'lerin Ω 'nın bir elemanı olduğunu söylemektedir.

Etkinsizlik ve minimum ekstrapolasyon postulatlarının eklenmesiyle $(\vec{x}_k, \vec{y}_k) \in \Omega$ ancak ve ancak

$$\vec{x}_k \geq \xi \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j \vec{x}_j, \quad \vec{y}_k \leq \xi \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j \vec{y}_j, \quad \xi > 0, \quad \bar{\lambda}_j \geq 0$$

ve

$$\sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j = 1$$

şartlarının sağlanması halinde mümkündür.

Bu noktada *Shephard uzaklık fonksiyonu* (Shephard's distance function) ve CCR etkinlik ölçüsü arasındaki ilişki ortaya konacaktır. Shephard [121] girdi kümesi $L(\vec{y})$ 'nin, $g(\vec{x}, \vec{y})$ ile gösterilecek olan, uzaklık fonksiyonunu $g(\vec{x}, \vec{y}) = 1/\theta(\vec{x}, \vec{y})$ olarak tanımlamaktadır. Bu tanımda, $\theta(\vec{x}, \vec{y}) = \min\{\theta | \theta \vec{x} \in L(\vec{y}), \theta \geq 0\}$.

Matematiksel programlama gösterimi çerçevesinde $\theta_k(\vec{x}_k, \vec{y}_k)$ şu şekilde gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
\theta_k(\vec{x}_k, \vec{y}_k) &= \min \theta_k \\
\text{s.t.} \\
\theta_k \vec{x}_k &\geq \xi \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j \vec{x}_j \\
\vec{y}_k &\leq \xi \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j \vec{y}_j \\
\sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j &= 1 \\
\bar{\lambda}_j &\geq 0, \quad \xi > 0 .
\end{aligned}$$

Yukarıda verilen modelde $\lambda_j = \xi \bar{\lambda}_j$ olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
\min \theta_k \\
\text{s.t.} \\
\theta_k \vec{x}_k - \sum_{j=1}^N \lambda_j \vec{x}_j &\geq 0 \\
\sum_{j=1}^N \lambda_j \vec{y}_j &\geq \vec{y}_k \\
\lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, N .
\end{aligned}$$

Burada elde edilmiş olan matematiksel programlama modeli daha önce tanımlanmış olan E_I modelidir. Böylece girdi kümeleri $L(\vec{y})$ için Shephard'ın uzaklık fonksiyonunun tersi ile CCR etkinlik ölçüsü arasındaki denklik ilişkisi verilen postulatlar çerçevesinde kurulmuştur. Çıktı kümeleri $P(\vec{x})$ ve Arşimedgil olmayan büyükler için CCR etkinlik ölçüsü ve Shephard'ın uzaklık fonksiyonu arasındaki denklik ilişkisi benzer şekilde kurulabilir.

4.2 Teknik Etkinlik

Ölçeğe göre sabit getiri varsayımı altında CCR modelleri yardımıyla bulunan toplam etkinlik skorları teknik ve ölçek etkinliklerini birlikte içermektedir. Ancak, toplam etkinlik skoru içinde teknik ve ölçek etkinlik bileşenlerinin büyüklüğü bilinmemektedir. Teknik ve ölçek etkinlik skorlarının birbirlerinden bağımsız ölçülebilmesine imkan vermek üzere ölçeğe göre sabit getiri varsayımına esas olan Postulat (2.6) ve (2.7) (Ölçeğe göre sabit getiri postulatı-Ray Unboundedness Postulate) iptal edilecektir. Bunun sonucunda oluşturulan üretim imkanları kümesinde yer alan gözlemlerden etkinlik skorları 1.0 olarak bulunanlar etkin sınır üzerinde yer alanlar olacaktır. Bu gözlemler, en verimli ölçek büyüklüğünden sapmalarından bağımsız olarak, sadece teknik etkinlikleri dikkate alınarak değerlendirilmiş olacaklardır. Böylece, karar birimlerinin sadece teknik etkinlikleri ölçülebilecektir. Banker, Charnes ve Cooper'ın çalışması çerçevesinde hangi karar birimlerinin etkin sınır üzerinde yer aldığı bilgisinin yanı sıra ölçeğe göre getirinin yönünün belirlenmesi de mümkün olacaktır.

Postulat (2.6) ve (2.7), postulat kümesinden çıkarıldığı zaman tanımlanmış olan üretim imkanları kümesi Şekil 2.1'de verilen \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} bölgelerinin birleşiminin tanımladığı bölgeye karşılık gelmektedir. Ölçeğe göre değişken getiri varsayımında bulunulan bu üretim imkanları kümesi ile ilgili olarak, $(\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega$ olması ancak ve ancak, $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$ koşulu altında

$$\vec{x}_k \geq \sum_{j=1}^N \lambda_j \vec{x}_j, \quad \vec{y}_k \leq \sum_{j=1}^N \lambda_j \vec{y}_j \quad (4.5)$$

olarak yazılır.

Tanımlanan üretim imkanları kümesine bağlı olarak girdi kümeleri $L(\vec{y})$ için Shephard uzaklık fonksiyonu

$$\theta_k(\vec{x}_k, \vec{y}_k) = \min \{ \theta_k | \theta_k \vec{x}_k \in L(\vec{y}_k), \theta_k \geq 0 \}$$

tanımı çerçevesinde $g(\vec{x}_k, \vec{y}_k) = 1/\theta_k(\vec{x}_k, \vec{y}_k)$ olarak yazılır.

Bu ifadelerin matematiksel programlama gösterimi ise:

$$\begin{aligned}
 & \text{Model } e_I : \\
 & \min \theta_k \\
 & \text{s.t.} \\
 & \theta_k X_{ik} - \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} \geq Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \\
 & \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} = 1 \\
 & \lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N .
 \end{aligned}$$

e_I modeline karşılık gelen düal model şöyledir:

$$\begin{aligned}
 & \text{Model } m_I : \\
 & \max \\
 & \phi_k = \sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rk} - \mu_0 \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ik} = 1 \\
 & \sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ij} - \mu_0 \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \\
 & \mu_{rk} \geq 0, \quad \nu_{ik} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned}$$

m_I modelinde yer alan μ_0 değişkeni kısıtsızdır (*urs*: unrestricted in sign), $-\infty < \mu_0 < \infty$. m_I modelinin kesirli programlama formunda yazılmış

hali aşağıda tfp_I adıyla sunulmuştur.

Model tfp_I :

max

$$h_k = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rk} - u_0}{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ik}}$$

s.t.

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rj} - u_0}{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, N$$

$$u_{rk} \geq 0, \quad v_{ik} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m$$

u_0 urs

Benzer şekilde, çıktı kümesi $P(\vec{x})$ için Shephard'ın uzaklık fonksiyonuna denk kesirli programlama modeli şu şekilde yazılabilir:

Model tfp_O :

max

$$h_k = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ik} + v_0}$$

s.t.

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ij} + v_0} \leq 1 \quad j = 1, \dots, N$$

$$u_{rk} \geq 0, \quad v_{ik} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m$$

v_0 urs

Ölçeğe göre sabit getiri postulatının kullanılmadığı durumda kurulan

Arşimedgil olmayan model, m_I^ϵ adıyla, aşağıda verilmiştir.

Model m_I^ϵ :

max

$$\phi_k = \sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rk} - \mu_0$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ik} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ij} - \mu_0 \leq 0 \quad j = 1, \dots, N$$

$$\mu_{rk} \geq \epsilon, \quad \nu_{ik} \geq \epsilon \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m$$

$$\mu_0 \quad ur s$$

m_I^ϵ modelinin düali ise

Model e_I^ϵ :

min

$$\theta_k - \epsilon \left[\sum_{i=1}^m s_{ik} + \sum_{r=1}^s s'_{rk} \right]$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} - s'_{rk} = Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s$$

$$\theta_k X_{ik} - \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} - s_{ik} = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_{jk} = 1 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\lambda_{jk}, s_{ik}, s'_{rk} \geq 0 \quad \forall i, j, r$$

şeklinde yazılır.

Yukarıda verilmiş olan tfp_I ve tfp_O modellerinin TFP_I ve TFP_O modelleri ile olan benzerlikleri açıkça görülmektedir. Buna dayanarak yukarıda verilmiş olan e_I , m_I , e_I^ϵ ve m_I^ϵ 'den hareketle e_O , m_O , e_O^ϵ ve m_O^ϵ türetilir. e_O ve m_O modelleri önemleri dolayısıyla ve bütünlük açısından aşağıda verilmiştir.

Model e_O :

$$\begin{aligned} & \max z_k \\ & \text{s.t.} \\ & - \sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} + Y_{rk} z_k \leq 0 \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} \leq X_{ik} \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} = 1 \\ & \lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

E_O modeline eklenen konvekslik kısıtıyla e_O modeli elde edilmiştir. M_O modelinden hareketle m_O modeline ulaşmak için, işlevi ileride açıklanacak olan, ν_0 değişkeni kullanılmıştır.

Model m_O :

$$\begin{aligned} & \min \\ & g_k = \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ik} + \nu_0 \\ & \text{s.t.} \\ & - \sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rj} + \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ij} + \nu_0 \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \\ & \sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rk} = 1 \\ & \mu_{rk} \geq 0, \nu_{ik} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \\ & \nu_0 \quad \text{ur s} \end{aligned}$$

Bu noktada etkin sınır üzerinde yer alan (\vec{x}_E, \vec{y}_E) noktasıyla ilgili ölçeğe göre lokal getiri ve kesirli programlama modeli olan tfp_I 'de yer alan u_0 değişkeni arasındaki ilişki incelenecektir.

tfp_I modelinin optimum çözümünü gösteren karar değişkenleri u_{rE}^* , v_{iE}^* ve u_0^* olsun. Bu değerlerin parametre olarak alındığı ve değişkenlerin Y_{rj} ve X_{ij} olarak tanımlandığı matematiksel programlama probleminde

$$\sum_{r=1}^s u_{rE}^* Y_{rE} - \sum_{i=1}^m v_{iE}^* X_{iE} - u_0^* = 0 \quad (4.7)$$

hiperdüzlemi üretim imkanları kümesinin bir desteğidir (supporting hyperplane). Bu önermeye ilişkin ispat aşağıda verilmiştir.

tfp_I modelinin kısıtları arasında bulunan

$$\sum_{r=1}^s u_{rE}^* Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{iE}^* X_{ij} - u_0^* \leq 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (4.8)$$

ifadesi, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$ ve $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$ olmak üzere

$$\sum_{r=1}^s u_{rE}^* \sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_j - \sum_{i=1}^m v_{iE}^* \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_j - u_0^* \leq 0 \quad (4.9)$$

yazılır. Daha önce verilen konvekslik postulatı çerçevesinde herhangi bir $(\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$ ve $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$ olmak üzere

$$\left(\sum_{j=1}^N \lambda_j \vec{x}_j, \sum_{j=1}^N \lambda_j \vec{y}_j \right) \quad (4.10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece,

$$(\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega \quad \Rightarrow \quad \sum_{r=1}^s u_{rE}^* Y_r - \sum_{i=1}^m v_{iE}^* X_i - u_0^* \leq 0. \quad (4.11)$$

Ayrıca, teknik etkin olarak tanımlanan (\vec{x}_E, \vec{y}_E) için

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rE}^* Y_{rE} - u_0^*}{\sum_{i=1}^m v_{iE}^* X_{iE}} = 1 \quad \text{veya} \quad \sum_{r=1}^s u_{rE}^* Y_{rE} - \sum_{i=1}^m v_{iE}^* X_{iE} - u_0^* = 0 \quad (4.12)$$

yazılır. Böylece (4.12) ifadesinde tanımlanan hiperdüzlemin (\vec{x}_E, \vec{y}_E) noktasında Ω 'yı desteklediği sonucuna varılır.

Açıkça görülmektedir ki, etkin sınır üzerinde bulunan bir noktada üretim imkanları kümesini destekleyen sadece tek bir hiperdüzlemin bulunması için modelin optimum çözümünü veren u_{rk}^* , v_{ik}^* ve u_0^* 'ın alternatifinin bulunmaması gerekmektedir. İlk olarak tek çözümün bulunduğu durum incelenecektir. Alternatif optimal çözümlerin varlığı halinde yapılan yorumlar geçerliliklerini kaybedeceklerdir. Bu durum §4.6'da ele alınacaktır.

$(\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega$ için $\sum_{r=1}^s u_{rE}^* Y_r - \sum_{i=1}^m v_{iE}^* X_i - u_0^* \leq 0$ olması gerektiği yukarıda açıklanmıştır. (\vec{x}_E, \vec{y}_E) noktasının komşuluğunda bulunan bir (\vec{x}_D, \vec{y}_D) noktasının üretim imkanları kümesinde bulunması için $\sum_{r=1}^s u_{rE}^* Y_{rD} - \sum_{i=1}^m v_{iE}^* X_{iD} - u_0^* \leq 0$ şartının sağlanması gerekir. (\vec{x}_E, \vec{y}_E) noktasında ölçeğe göre artan, sabit veya azalan getiri durumlarından hangisinin var olduğunu görebilmek için (\vec{x}_E, \vec{y}_E) 'nin komşuluğunda, δ yeteri kadar küçük seçilerek,

$$Z_\delta \equiv ((1 + \delta)\vec{x}_E, (1 + \delta)\vec{y}_E) \quad (4.13)$$

noktası tanımlanacaktır.

- İlgili noktada *ölçeğe göre artan getiri* durumunun gerçekleştiği ancak ve ancak (i) $\delta^* > \delta \geq 0$ için $Z_\delta \in \Omega$ ve (ii) $-\delta^* < \delta < 0$ için $Z_\delta \notin \Omega$ şartlarını sağlayacak bir $\delta^* > 0$ bulunursa söylenir.
- İlgili noktada *ölçeğe göre sabit getiri* durumunun gerçekleştiği ancak ve ancak (i) $\delta^* > |\delta|$ şartını sağlayan tüm δ için $Z_\delta \in \Omega$ veya (ii) $\delta^* > |\delta| > 0$ şartını sağlayan tüm δ için $Z_\delta \notin \Omega$ şartlarını sağlayacak bir $\delta^* > 0$ bulunursa söylenir.
- İlgili noktada *ölçeğe göre azalan getiri* durumunun gerçekleştiği ancak ve ancak (i) $\delta^* > \delta > 0$ için $Z_\delta \notin \Omega$ ve (ii) $-\delta^* < \delta \leq 0$ için $Z_\delta \in \Omega$ şartlarını sağlayacak bir $\delta^* > 0$ bulunursa söylenir.

(\vec{x}_E, \vec{y}_E) 'nin komşuluğunda tanımlanan Z_δ noktası için

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^s u_{rE}^* (1 + \delta) Y_{rE} - \sum_{i=1}^m v_{iE}^* (1 + \delta) X_{iE} - u_0^* &= \\ (1 + \delta) \underbrace{\left(\sum_{r=1}^s u_{rE}^* Y_{rE} - \sum_{i=1}^m v_{iE}^* X_{iE} - u_0^* \right)}_0 + \delta u_0^* &= \delta u_0^* \end{aligned}$$

yazılır. Böylece $Z_\delta \equiv ((1 + \delta) X_{iE}, (1 + \delta) Y_{rE}) \in \Omega$ olması ancak ve ancak $\delta u_0^* \leq 0$ şartının gerçekleşmesi halinde mümkündür. Buradan çıkarılacak sonuç önemlidir: Eğer $u_0^* < 0$ ise $\delta > 0$ olmalıdır; eğer $u_0^* > 0$ ise $\delta < 0$ olmalıdır; eğer $u_0^* = 0$ ise δ herhangi bir değeri alabilir. Bu vargılar yukarıda verilen üç durum ile ilişkilendirilirse,

- Ölçeğe göre artan getiri $\Leftrightarrow u_0^* < 0$
- Ölçeğe göre sabit getiri $\Leftrightarrow u_0^* = 0$
- Ölçeğe göre azalan getiri $\Leftrightarrow u_0^* > 0$

elde edilir. Diğer bir deyişle, (\vec{x}_E, \vec{y}_E) noktası için e_I veya tfp_I modellerinden elde edilen u_0^* 'in negatif olması halinde ölçeğe göre artan, sıfır olması halinde ölçeğe göre sabit ve pozitif olması halinde ölçeğe göre azalan getiri bulunduğu sonucuna varılır.

Şekil 4.1, yukarıda açıklanan duruma ilişkin bir açıklayıcı örneği göstermektedir. Bu örnekte yer alan A karar birimi için $u_0^* < 0$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla A karar birimi ölçeğe göre artan getiri özelliği göstermektedir. Diğer bir karar birimi olan B için $u_0^* > 0$ 'dır ve ölçeğe göre azalan getiri vardır. Eğer $u_0^* = 0$ 'ın geçerli olduğu bir doğru parçası bulunsaydı ölçeğe göre sabit getirinin olduğu söylenebilirdi.

Bu noktaya kadar yapılan açıklamalar özetlenecek olursa, ilk önemli sonuç girdiye yönelik olarak verilmiş olan e_I ve m_I modelleri ile çıktıya yönelik olarak verilmiş olan e_O ve m_O modelleri yardımıyla benzer ölçekteki karar birimlerinin etkinlikleri kıyaslanarak ölçekten kaynaklanan etkinsizlikten arındığıdır. Böylece karar birimlerinin teknik etkinliklerini ölçmek mümkün hale gelmiştir. Bu modeller Banker, Charnes ve Cooper'a referans verilmek üzere BCC modelleri olarak adlandırılmaktadır. Bu modeller yardımıyla teknik etkinlik skorunun ölçülmesinin

göre artan getiri (IRS) durumunun var olması için tüm girdi miktarlarının artış oranından daha yüksek bir oranda çıktı miktarında artış gözlenmesi gerekir. Benzer şekilde, bir üretim sürecine ilişkin olarak *ölçeğe göre azalan getiri* (DRS) durumunun var olması için tüm girdi miktarlarının artış oranından daha düşük bir oranda çıktı miktarında artış gözlenmesi gerekir. Bu tanımlamalarla ilgi olarak [91] incelenebilir.

Aşağıda verilen, bu kavramların çok-girdi çok-çıkıtı durumunu içerecek şekilde genişletilmesi sürecinde s.6'da tanımlanan notasyon kullanılmıştır. Üretim imkanları kümesi, Postulat (2.1)'de verildiği şekliyle tanımlanmıştır. Etkin sınır üzerinde tanımlanan (\vec{x}, \vec{y}) noktasında ölçeğe göre getiri, bir büyüklüğü gösteren ρ yardımıyla,

$$\alpha(\beta) = \max\{\alpha | (\beta\vec{x}, \alpha\vec{y}) \in \Omega\}, \beta > 0$$

olmak üzere,

$$\rho = \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{\alpha(\beta) - 1}{\beta - 1} \quad (4.15)$$

tanımlanmıştır.

Böylece, $\rho > 1$ olması ölçeğe göre artan getiriye işaret edecektir. Çünkü, girdi ve çıktı karışımını sabit tutmak kaydıyla, girdi miktarlarındaki değişim, çıktı miktarlarında oransal olarak daha büyük bir değişime yol açmaktadır. Benzer şekilde, ölçeğe göre azalan ve sabit getiri, sırasıyla, $\rho < 1$ ve $\rho = 1$ 'e karşılık gelir.

Bu noktada, yukarıda tanımlanan çok-girdi çok-çıkıtı durumunda en verimli ölçek büyüklüğü ve ölçeğe göre getiri ilişkisi üzerinde durulacaktır. Verilen tek girdi ve tek çıktı için MPSS, birim girdi başına maksimum çıktı üretiminin gerçekleştiği ölçek büyüklüğüdür. Dolayısıyla, $(\vec{x}_s, \vec{y}_s) \in \Omega$ üretim karışımı, ancak ve ancak diğer tüm mümkün üretim karışımları $(\beta\vec{x}_s, \alpha\vec{y}_s) \in \Omega$ için $\alpha/\beta \leq 1$ ise, bir MPSS'dir. Bu bağlamda MPSS kavramı ortalama verimliliklerin kıyaslanmasına indirgenemez. Bununla ilgili olarak Banker'ın, [6], ispatladığı önerme aşağıda verilmiştir.

Önerme 4.1. *Eğer mümkün bir üretim karışımı $(\vec{x}_s, \vec{y}_s) \in \Omega$, girdi ve çıktı karışımı \vec{x}_s ve \vec{y}_s için MPSS oluşturuyorsa ve eğer (\vec{x}_s, \vec{y}_s) verilen girdi-çıkıtı karışımı için ne en küçük ne de en büyük mümkün üretim ise, o zaman (\vec{x}_s, \vec{y}_s) biraz daha küçükler için ölçeğe göre azalmayan getiri ve (\vec{x}_s, \vec{y}_s) 'den biraz daha büyükler için ölçeğe göre artmayan getiri ifade*

eder. Ölçeğe göre sabit getiri, (\vec{x}_s, \vec{y}_s) 'de gerçekleşir.

İspat. Komşu olan bir $(\beta\vec{x}_s, \alpha(\beta)\vec{y}_s) \in \Omega$ noktası dikkate alındığında, \vec{x}_s ve \vec{y}_s MPSS oluşturduğu ve $(\beta\vec{x}_s, \alpha(\beta)\vec{y}_s) \in \Omega$ olduğu için $\alpha(\beta)/\beta \leq 1$.

Buradan, $\beta < 1$ için,

$$\begin{aligned} \alpha(\beta) \leq \beta &\Leftrightarrow \alpha(\beta) - 1 \leq \beta - 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha(\beta) - 1}{\beta - 1} \geq 1 \end{aligned}$$

yazılır. Yeteri kadar küçük olan $\epsilon > 0$ tanımlanarak

$$\lim_{\beta \rightarrow 1 - \epsilon} \frac{\alpha(\beta) - 1}{\beta - 1} \geq 1.$$

Böylece, (\vec{x}_s, \vec{y}_s) 'den biraz daha küçük olan mümkün üretim karışımları için ölçeğe göre getiri azalmayan türdedir sonucuna varılır.

Benzer şekilde, $\beta > 1$ için,

$$\alpha(\beta) \leq \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha(\beta) - 1}{\beta - 1} \leq 1$$

ve $\epsilon > 0$ yeteri kadar küçük bir büyüklük olarak tanımlandığında

$$\lim_{\beta \rightarrow 1 + \epsilon} \frac{\alpha(\beta) - 1}{\beta - 1} \leq 1$$

bulunur. Sonuç olarak, (\vec{x}_s, \vec{y}_s) 'den biraz daha büyük olan mümkün üretim karışımları için ölçeğe göre getiri artmayan türdedir.

Son olarak, ölçeğe göre getiri fonksiyonu (\vec{x}_s, \vec{y}_s) 'de tanımlandığında,

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{\alpha(\beta) - 1}{\beta - 1} = 1$$

bulunur. Böylece, (\vec{x}_s, \vec{y}_s) 'de ölçeğe göre sabit getirinin olduğu görülür. \square

Bu noktada, DEA yardımıyla en verimli ölçek büyüklüğünün belirlenmesi konusu ilk defa Banker [6] tarafından sunulduğu şekliyle ele alı-

nacaktır. Bu amaçla kullanılacak olan DEA modeli (bkz. s.80) E_I^ϵ 'dir.

$$\text{Model } E_I^\epsilon : \quad \min \quad (4.20)$$

$$\theta_k - \epsilon \left[\sum_{i=1}^m s_{ik} + \sum_{r=1}^s s'_{rk} \right] \quad (4.21)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} - s'_{rk} = Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (4.22)$$

$$\theta_k X_{ik} - \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} - s_{ik} = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (4.23)$$

$$\lambda_{jk}, s_{ik}, s'_{rk} \geq 0 \quad \forall i, j, r \quad (4.24)$$

Üretim imkanları kümesine ilişkin verilen postulatlar ışığında, üretim imkanları kümesini gösteren Ω için

$$\Omega = \left\{ (\vec{x}, \vec{y}) \mid \vec{x} \geq \sum_{j=1}^N \mu_j \vec{x}_j, \vec{y} \leq \sum_{j=1}^N \mu_j \vec{y}_j, \sum_{j=1}^N \mu_j = 1, \mu_j \geq 0 \right\}$$

yazılır.

Daha önce belirtildiği üzere, *CCR* modelleri karar birimlerinin teknik ve ölçek etkinliklerini birlikte gösteren toplam etkinlik ölçüsünü vermektedir. Ölçek etkinliğinin ölçüsü olarak en verimli ölçek büyüklüğünden farklı olma sonucu ortaya çıkan etkinsizlik anlaşılmaktadır. Bu husus, aşağıda verilen Önerme (4.2) ile açıkça ortaya konmuştur.

Önerme 4.2. *Karar birimi k 'ya ait E_I^ϵ 'in optimal çözümünü gösteren θ_k^* 'nın 1.0'a eşit olması ancak ve ancak k 'nın en verimli ölçek büyüklüğüne (MPSS) sahip olması halinde mümkündür.*

İspat. (\vec{x}_k, \vec{y}_k) 'ın MPSS olmadığı varsayalım. Öyleyse, öyle bir $(\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega$ bulunabilir ki, $\vec{x} = \beta \vec{x}_k$, $\vec{y} = \alpha \vec{y}_k$ ve $\alpha/\beta > 1$. Ayrıca, $(\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega$ olduğu

için, $\mu_j \geq 0$ ve $\sum_{j=1}^N \mu_j = 1$ olmak üzere,

$$\vec{x} \geq \sum_{j=1}^N \mu_j \vec{x}_j \quad \text{ve} \quad \vec{y} \leq \sum_{j=1}^N \mu_j \vec{y}_j \quad (4.25)$$

$\lambda_j = \mu_j/\alpha$ olsun. O zaman, (4.25) yardımıyla

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \vec{x}_j \leq (1/\alpha) \vec{x}_j = (\beta/\alpha) \vec{x}_k \quad (4.26)$$

ve

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \vec{y}_j \geq (1/\alpha) \vec{y}_j = \vec{y}_k \quad (4.27)$$

$\theta_k = \beta/\alpha$ olarak tanımlanırsa E_I^c modelinin kısıtlarının tümünün sağlandığı görülür. Fakat $\theta_k = \beta/\alpha < 1$, minimizasyon tipindeki E_I^c modelinin mümkün çözümü olduğu için $\theta_k^* < 1$ olmalıdır. Böylece, $\theta_k^* = 1 \rightarrow (\vec{x}_k, \vec{y}_k)$ bir MPSS'tir.

Şimdi $\theta_k^* < 1$ olduğu varsayılacaktır. E_I^c modelinin optimal çözümünde λ_j değişkenlerinin değerleri λ_j^* 'la gösterilecektir. O zaman,

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^* \vec{x}_j \leq \theta_k^* \vec{x}_k, \quad \sum_{j=1}^N \lambda_j^* \vec{y}_j \geq \vec{y}_k \quad (4.28)$$

Yeni tanımlanan $\kappa^* = \sum_{j=1}^N \lambda_j^*$ ve

$$\mu_j^* = \lambda_j/\kappa^* \geq 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (4.29)$$

yardımla $\sum_{j=1}^N \mu_j^* = 1$ bulunur.

Ayrıca, $\alpha = 1/\kappa^*$ ve $\beta = \theta_k^*/\kappa^*$ olarak tanımlanırsa, (4.28) ve (4.29)

yardımla

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N \mu_j^* \vec{x}_j &\leq \beta \vec{x}_k, \\
\sum_{j=1}^N \mu_j^* \vec{y}_j &\geq \alpha \vec{y}_k, \\
\sum_{j=1}^N \mu_j^* &= 1,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

bulunur.

Böylece, Ω tanımından hareketle $(\beta \vec{x}_k, \alpha \vec{y}_k) \in \Omega$ ve

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1/\kappa^*}{\theta_k^*/\kappa^*} = 1/\theta_k^* > 1$$

yazılır. Buradan (\vec{x}_k, \vec{y}_k) 'in MPSS olamayacağı görülmektedir. Böylece, (\vec{x}_k, \vec{y}_k) MPSS ise $\theta_k^* = 1$ olduğu ispat edilmiş olur. \square

Yukarıda tanımlanmış olan κ^* değişkeni yardımcıla karar birimine ilişkin ölçğe göre getiri ile ilgili tespitlerde bulunmak mümkündür. Bu hususla ilgili iki bağıntı aşağıda verilmiştir.

Bağıntı 4.1. *Ölçğe göre artan lokal getiriye $\kappa^* < 1$ ve ölçğe göre azalan lokal getiriye $\kappa^* > 1$ durumu karşılık gelmektedir.*

Bağıntı 4.2. *$\left(\frac{\theta_k^*}{\kappa^*} \vec{x}_k, \frac{1}{\kappa^*} \vec{y}_k\right) \in \Omega$ ve bir MPSS göstermektedir.*

Bu iki bağıntının ispatı doğrudan Önerme (4.2)'den yapılabilir.

Sonuç olarak, \vec{x}_k ve \vec{y}_k karışımıyla üretim yapan bir karar birimi için en verimli ölçek büyüklüğünün belirlenmesinde ve verilen girdi-çıkı miktarları çerçevesinde, $\kappa^* = \sum_{j=1}^N \lambda_j$ değeri yardımcıla, MPSS'den sapmanın ölçüsünün bulunmasında bu iki bağıntı kullanılacaktır.

Mümkün bir üretim karışımı olan $\left(\frac{\theta_k^*}{\kappa^*} \vec{x}_k, \frac{1}{\kappa^*} \vec{y}_k\right)$ bir MPSS göstermesine rağmen üretim sınırı üzerinde yer almayabilir. Bununla ilgili bir bağıntı aşağıda verilmiştir.

Bağıntı 4.3. \vec{s}_k ve \vec{s}'_k vektörleri sırasıyla girdi ve çıktılara ilişkin aylak vektörünü göstermek üzere, mümkün bir üretim karışımı olan

$$\left(\frac{\theta_k^* \vec{x}_k - \vec{s}_k}{\kappa^*}, \frac{\vec{y}_k + \vec{s}'_k}{\kappa^*} \right) \quad (4.32)$$

MPSS tanımlamakta ve etkin sınır üzerinde yer almaktadır.

Yukarıda verilen sonuçlar E_I^ϵ modeli yardımıyla bulunan sonuçlardır ve dolayısıyla girdiye yönelik durum için geçerlidir. Aynı yaklaşım çıktıya yönelik olarak da tasarlanabilir. Bunun için E_O^ϵ modeli kullanılacaktır.

Model E_O^ϵ :

$$\max \quad (4.33)$$

$$z_k + \epsilon \left[\sum_{i=1}^m s_{ik} + \sum_{r=1}^s s'_{rk} \right] \quad (4.34)$$

s.t.

$$- \sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} + Y_{rk} z_k + s'_{rk} = 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (4.35)$$

$$\sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} - X_{ik} + s_{ik} = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (4.36)$$

$$\lambda_{jk}, s_{ik}, s'_{rk} \geq 0 \quad \forall i, j, r \quad (4.37)$$

Daha önce kullanılan yaklaşım çerçevesinde bulunacak olan bağıntılar şunlardır:

Bağıntı 4.4. $q_k^* = \sum_{j=1}^N \mu_j^*$ olarak tanımlandığında,

$$\left(\frac{1}{q_k^*} \vec{x}_k, \frac{z_k^*}{q_k^*} \vec{y}_k \right) \in \Omega$$

ve bir MPSS göstermektedir.

Bağıntı 4.5.

$$\left(\frac{\vec{x}_k - \vec{s}_k}{q_k^*}, \frac{z_k^* \vec{y}_k + s'_k}{q_k^*} \right)$$

bir MPSS göstermektedir ve etkin sınır üzerinde bulunmaktadır.

Son olarak, eğer üretim karışımı (\vec{x}_k, \vec{y}_k) için tek bir MPSS bulunuyorsa E_I^c modelinin karar değişkenleri olan ağırlıklar λ_j^* ve E_O^c modelinin karar değişkenleri olan μ_j^* arasındaki ilişki verilecektir:

Bağıntı 4.6.

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^* = \theta_k^* \sum_{j=1}^N \mu_j^* \quad (4.40)$$

Bu vargının doğruluğu bağıntılarda verilen MPSS ifadelerinin karşılaştırılması sonucu görülür.

4.4 Örnekler

Bu kısımda, daha önce incelenmiş olan (s.34) bir örnek için toplam, teknik ve ölçek etkinlik skorları girdiye yönelik CCR ve BCC modelleri ile bulunmuştur. Aşağıda M_I modeli kullanılarak oluşturulan toplam etkinlik modelleri görülmektedir.

Karar Birimi A

$$\begin{aligned} & \max 1.5 \mu_1 \\ & \text{st} \\ & -3.5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 \leq 0 \\ & -5 \nu_1 + 6 \mu_1 \leq 0 \\ & -6 \nu_1 + 8 \mu_1 \leq 0 \\ & -6 \nu_1 + 6 \mu_1 \leq 0 \\ & -9 \nu_1 + 9 \mu_1 \leq 0 \\ & -5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 \leq 0 \\ & 3.5 \nu_1 = 1 \end{aligned}$$

Karar Birimi B

$$\begin{aligned} & \max 6 \mu_1 \\ & \text{st} \\ & -3.5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 \leq 0 \\ & -5 \nu_1 + 6 \mu_1 \leq 0 \\ & -6 \nu_1 + 8 \mu_1 \leq 0 \\ & -6 \nu_1 + 6 \mu_1 \leq 0 \\ & -9 \nu_1 + 9 \mu_1 \leq 0 \\ & -5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 \leq 0 \end{aligned}$$

$$5 \nu_1 = 1$$

Karar Birimi C

$$\begin{aligned} & \max 8 \mu_1 \\ & \text{st} \\ & -3.5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 \leq 0 \\ & -5 \nu_1 + 6 \mu_1 \leq 0 \\ & -6 \nu_1 + 8 \mu_1 \leq 0 \\ & -6 \nu_1 + 6 \mu_1 \leq 0 \\ & -9 \nu_1 + 9 \mu_1 \leq 0 \\ & -5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 \leq 0 \\ & 6 \nu_1 = 1 \end{aligned}$$

Karar Birimi D

$$\begin{aligned} & \max 6 \mu_1 \\ & \text{st} \\ & -3.5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 \leq 0 \\ & -5 \nu_1 + 6 \mu_1 \leq 0 \\ & -6 \nu_1 + 8 \mu_1 \leq 0 \\ & -6 \nu_1 + 6 \mu_1 \leq 0 \\ & -9 \nu_1 + 9 \mu_1 \leq 0 \end{aligned}$$

DMU	τ_{ts}	μ_1	ν_1	λ_A	λ_B	λ_C	λ_D	λ_E	λ_F
A	0.32	0.214	0.286	0.0	0.0	0.186	0.0	0.0	0.0
B	0.90	0.150	0.200	0.0	0.0	0.750	0.0	0.0	0.0
C	1.00	0.125	0.167	0.0	0.0	1.000	0.0	0.0	0.0
D	0.75	0.125	0.167	0.0	0.0	0.750	0.0	0.0	0.0
E	0.75	0.083	0.111	0.0	0.0	1.125	0.0	0.0	0.0
F	0.23	0.150	0.200	0.0	0.0	0.186	0.0	0.0	0.0

Tablo 4.1: Toplam Etkinlik Skorları

$$-5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 \leq 0$$

$$6 \nu_1 = 1$$

Karar Birimi E

$$\max 9 \mu_1$$

st

$$-3.5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 \leq 0$$

$$-5 \nu_1 + 6 \mu_1 \leq 0$$

$$-6 \nu_1 + 8 \mu_1 \leq 0$$

$$-6 \nu_1 + 6 \mu_1 \leq 0$$

$$-9 \nu_1 + 9 \mu_1 \leq 0$$

$$-5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 \leq 0$$

$$9 \nu_1 = 1$$

Karar Birimi F

$$\max 1.5 \mu_1$$

st

$$-3.5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 \leq 0$$

$$-5 \nu_1 + 6 \mu_1 \leq 0$$

$$-6 \nu_1 + 8 \mu_1 \leq 0$$

$$-6 \nu_1 + 6 \mu_1 \leq 0$$

$$-9 \nu_1 + 9 \mu_1 \leq 0$$

$$-5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 \leq 0$$

$$5 \nu_1 = 1$$

Yukarıda verilen modellerin çözümlerinden derlenen Tablo 4.1, karar birimi bazında toplam etkinlik skoru τ_{ts} , çıktı ve girdi ağırlıkları μ_1 ve ν_1 , ve düal değişkenleri göstermektedir.

Sadece teknik etkinlik skorunu ölçen m_I tipindeki *BCC* modelleri ilgili karar birimleri için oluşturulmuştur.

Karar Birimi A

$$\max 1.5 \mu_1 - \mu_0$$

st

$$-3.5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 - \mu_0 \leq 0$$

$$-5 \nu_1 + 6 \mu_1 - \mu_0 \leq 0$$

$$-6 \nu_1 + 8 \mu_1 - \mu_0 \leq 0$$

$$-6 \nu_1 + 6 \mu_1 - \mu_0 \leq 0$$

$$-9 \nu_1 + 9 \mu_1 - \mu_0 \leq 0$$

$$-5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 - \mu_0 \leq 0$$

$$3.5 \nu_1 = 1$$

Karar Birimi B

$$\max 6 \mu_1 - \mu_0$$

st

$$-3.5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 - \mu_0 \leq 0$$

$$-5 \nu_1 + 6 \mu_1 - \mu_0 \leq 0$$

$$-6 \nu_1 + 8 \mu_1 - \mu_0 \leq 0$$

$$\begin{aligned}
-6 \nu_1 + 6 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-9 \nu_1 + 9 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
5 \nu_1 &= 1
\end{aligned}$$

Karar Birimi C

$$\begin{aligned}
\max 8 \mu_1 - \mu_0 \\
\text{st} \\
-3.5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-5 \nu_1 + 6 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-6 \nu_1 + 8 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-6 \nu_1 + 6 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-9 \nu_1 + 9 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
6 \nu_1 &= 1
\end{aligned}$$

Karar Birimi D

$$\begin{aligned}
\max 6 \mu_1 - \mu_0 \\
\text{st} \\
-3.5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-5 \nu_1 + 6 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-6 \nu_1 + 8 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-6 \nu_1 + 6 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-9 \nu_1 + 9 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
6 \nu_1 &= 1
\end{aligned}$$

Karar Birimi E

$$\begin{aligned}
\max 9 \mu_1 - \mu_0 \\
\text{st} \\
-3.5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-5 \nu_1 + 6 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-6 \nu_1 + 8 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-6 \nu_1 + 6 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-9 \nu_1 + 9 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
9 \nu_1 &= 1
\end{aligned}$$

Karar Birimi F

$$\begin{aligned}
\max 1.5 \mu_1 - \mu_0 \\
\text{st} \\
-3.5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-5 \nu_1 + 6 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-6 \nu_1 + 8 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-6 \nu_1 + 6 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-9 \nu_1 + 9 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
-5 \nu_1 + 1.5 \mu_1 - \mu_0 &\leq 0 \\
5 \nu_1 &= 1
\end{aligned}$$

Bu matematiksel programlama modellerinin çözümleri çerçevesinde oluşturulan Tablo 4.2'de sırasıyla teknik etkinlik skoru τ_t , çıktı ağırlığı μ_1 , ölçeğe ilişkin karar değişkeni μ_0 , girdi ağırlığı ν_1 ve düal değişkenler bulunmaktadır.

Tablo 4.1 ve 4.2 birleştirilerek oluşturulan Tablo 4.3 karar birimlerinin toplam etkinlik skorlarının teknik etkinlik skorlarına bölünmesiyle bulunan ölçek etkinlik skorlarını ve μ_0 değerlerine bağlı olarak ölçeğe göre artan (*IRS*), azalan (*DRS*) ve sabit (*CRS*) getiri yorumunu vermektedir.

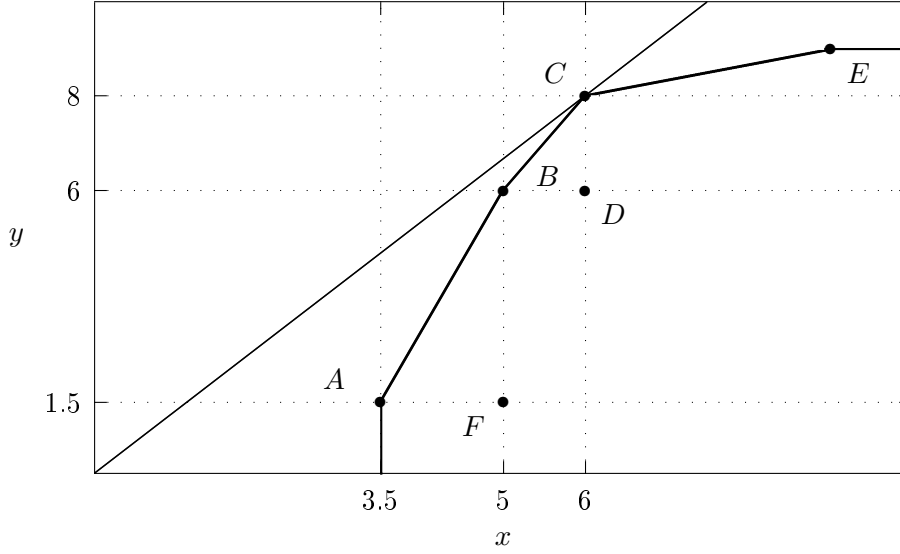
Girdi ve çıktı miktarlarına bağlı olarak hazırlanan şekilden görüleceği üzere karar birimleri *A* ve *F* aynı çıktı düzeyindedir. Benzer şekilde, *B* ve *D* karar birimlerinin çıktı miktarları aynıdır. Eğer *D* ve *F* karar birimleri çıktı düzeylerini değiştirmeden teknik etkin üretim yapsalardı, sırasıyla, *B* ve *A* karar birimlerinin buldukları yerde olacaktı. Dolayısıyla, ölçek etkinliği bakımından kıyaslanan bu karar birimlerinden *B* ile *D*'nin

DMU	τ_t	μ_1	μ_0	ν_1	λ_A	λ_B	λ_C	λ_D	λ_E	λ_F
<i>A</i>	1.00	0.000	-1.00	0.286	1	0	0	0	0	0
<i>B</i>	1.00	0.066	-0.60	0.200	0	1	0	0	0	0
<i>C</i>	1.00	0.083	-0.33	0.166	0	0	1	0	0	0
<i>D</i>	0.83	0.056	-0.50	0.166	0	1	0	0	0	0
<i>E</i>	1.00	0.333	2.00	0.111	0	0	0	0	1	0
<i>F</i>	0.70	0.066	-0.60	0.200	1	0	0	0	0	0

Tablo 4.2: Teknik Etkinlik Skorları

DMU	τ_{ts}	τ_t	$\tau_{ts}/\tau_t = \tau_s$	μ_0	Ölçek
<i>A</i>	0.32	1.00	0.32	-1.00	IRS
<i>B</i>	0.90	1.00	0.32	-0.60	IRS
<i>C</i>	1.00	1.00	1.00	-0.33	CRS
<i>D</i>	0.75	0.83	0.90	-0.50	IRS
<i>E</i>	0.75	1.00	0.75	2.00	DRS
<i>F</i>	0.23	0.70	0.32	-0.60	IRS

Tablo 4.3: Ölçek Etkinliği Skorları



Şekil 4.2: Örnek

ve A ile F 'nin aynı ölçek etkinlik skoruna sahip olmaları beklenen bir sonuçtur.

Bu örnekte ölçeğe göre sabit getiri doğrusunu belirleyen karar birimi C 'dir. m_I modelinin C için çözümüne bakıldığında μ_0 değişkeninin optimum değerinin -0.33 olduğu görülür. Ölçeğe göre sabit getiri doğrusu etkin sınırın bir parçası ile çakışmadığı için μ_0 değerinin 0 olması gerekmemektedir. μ_0 'ın 0 olması gerektiği durumu görebilmek için örnekte değişiklik yapılmış ve B karar birimi C ile aynı verimlilik düzeyine ulaşacak şekilde girdi miktarı 5 birimden 4.5 birime indirilmiştir. Bunlara ek olarak, yeni bir karar birimi G tanımlanmıştır. G , B ve C 'nin arasında yer alan ve aynı verimlilik düzeyinde olan bir karar birimidir. G 'nin girdi ve çıktı miktarları sırasıyla 5.25 birim ve 7 birim olarak tanımlanmıştır. Bu şartlar altında gözlenen ölçeğe göre sabit getiri doğrusu ve etkin sınırla, matematiksel programlama modellerinin çözümü sonucunda elde edilen etkinlik skorları Şekil 4.3 ve Tablo 4.4 olarak verilmiştir. B ve C karar birimleri etkin sınırın ölçeğe göre sabit getiri doğrusuyla çakıştığı parçayı sınırlandırmaktadır. Böylece, B için bulunan μ_0 değerinin 0 'ın altına inmesi ve C için bulunan μ_0 değerinin 0 'ın üzerine çıkması sonucu

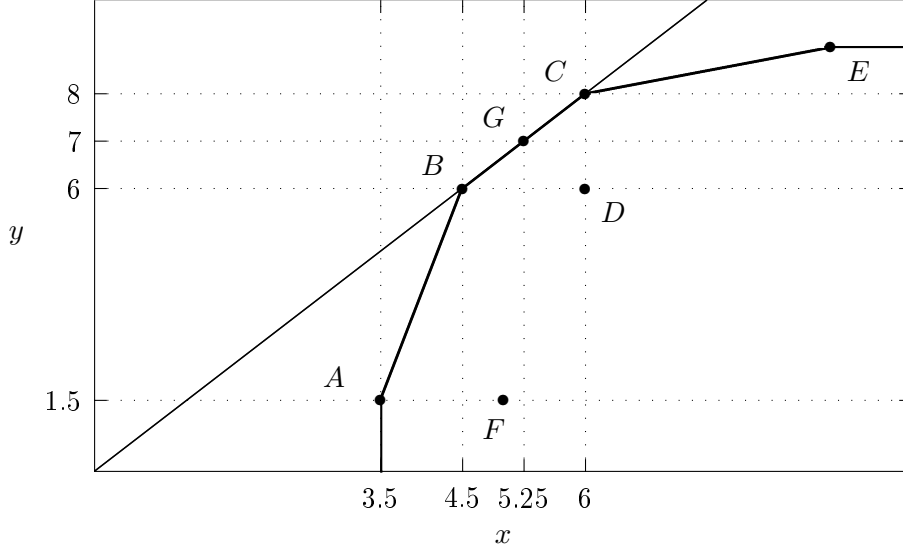
DMU	τ_{ts}	τ_t	$\tau_{ts}/\tau_t = \tau_s$	μ_0	Ölçek
<i>A</i>	0.32	1.00	0.32	-0.90	IRS
<i>B</i>	1.00	1.00	1.00	$0.00 - \epsilon$	CRS
<i>C</i>	1.00	1.00	1.00	$0.00 + \epsilon$	CRS
<i>D</i>	0.75	0.75	1.00	$0.00 - \epsilon$	CRS
<i>E</i>	0.75	1.00	0.75	2.00	DRS
<i>F</i>	0.23	0.70	0.32	-0.63	IRS
<i>G</i>	1.00	1.00	1.00	0.00	CRS

Tablo 4.4: Değiştirilmiş Örnek

değiştirmez. Ancak, *B* ve *C* arasında olup etkin sınır üzerinde, ve dolayısıyla ölçeğe göre sabit getiri doğrusu üzerinde, bulunan *G* karar birimine ilişkin μ_0 değerinin 0'ın altına inmesi veya üzerine çıkması halinde optimum çözümden uzaklaşmaktadır. Beklendiği üzere, *G* karar birimine sadece tek bir şekilde teğet çizilebilmesi sebebiyle, ilişkin μ_0 değeri sadece 0 değerini alabilmektedir.

4.5 Ölçeğe Göre Değişken Getiri

Önceki kısımda incelenmiş olan örnek tekrar ele alınacaktır. Karar birimlerinin etkinliklerinin incelenmesi sürecinde, önceki kısımdan farklı



Şekil 4.3: Değiştirilmiş Örnek

olarak, e_I modeli kullanılacaktır. Hatırlanacağı üzere, e_I modeli

Model e_I :

$$\min \theta_k$$

s.t.

$$\theta_k X_{ik} - \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} \geq Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_{jk} = 1$$

$$\lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Oluşturulan zarflama modelleri şöyledir:

Karar Birimi A

$$\begin{aligned}
& \min \theta_A \\
& \text{st} \\
& 3.5 \theta_A - 3.5 \lambda_A - 5 \lambda_B - 6 \lambda_C - 6 \lambda_D - 9 \lambda_E - 5 \lambda_F \geq 0 \\
& 1.5 \lambda_A + 6 \lambda_B + 8 \lambda_C + 6 \lambda_D + 9 \lambda_E + 1.5 \lambda_F \geq 1.5 \\
& \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_E + \lambda_F = 1
\end{aligned}$$

Karar Birimi B

$$\begin{aligned}
& \min \theta_B \\
& \text{st} \\
& 4.5 \theta_B - 3.5 \lambda_A - 5 \lambda_B - 6 \lambda_C - 6 \lambda_D - 9 \lambda_E - 5 \lambda_F \geq 0 \\
& 1.5 \lambda_A + 6 \lambda_B + 8 \lambda_C + 6 \lambda_D + 9 \lambda_E + 1.5 \lambda_F \geq 6 \\
& \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_E + \lambda_F = 1
\end{aligned}$$

Karar Birimi C

$$\begin{aligned}
& \min \theta_C \\
& \text{st} \\
& 6 \theta_C - 3.5 \lambda_A - 5 \lambda_B - 6 \lambda_C - 6 \lambda_D - 9 \lambda_E - 5 \lambda_F \geq 0 \\
& 1.5 \lambda_A + 6 \lambda_B + 8 \lambda_C + 6 \lambda_D + 9 \lambda_E + 1.5 \lambda_F \geq 8 \\
& \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_E + \lambda_F = 1
\end{aligned}$$

Karar Birimi D

$$\begin{aligned}
& \min \theta_D \\
& \text{st} \\
& 6 \theta_D - 3.5 \lambda_A - 5 \lambda_B - 6 \lambda_C - 6 \lambda_D - 9 \lambda_E - 5 \lambda_F \geq 0 \\
& 1.5 \lambda_A + 6 \lambda_B + 8 \lambda_C + 6 \lambda_D + 9 \lambda_E + 1.5 \lambda_F \geq 6 \\
& \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_E + \lambda_F = 1
\end{aligned}$$

Karar Birimi E

$$\begin{aligned}
& \min \theta_E \\
& \text{st} \\
& 9 \theta_E - 3.5 \lambda_A - 5 \lambda_B - 6 \lambda_C - 6 \lambda_D - 9 \lambda_E - 5 \lambda_F \geq 0 \\
& 1.5 \lambda_A + 6 \lambda_B + 8 \lambda_C + 6 \lambda_D + 9 \lambda_E + 1.5 \lambda_F \geq 9 \\
& \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_E + \lambda_F = 1
\end{aligned}$$

Karar Birimi F

$$\begin{aligned}
& \min \theta_F \\
& \text{st} \\
& 5 \theta_F - 3.5 \lambda_A - 5 \lambda_B - 6 \lambda_C - 6 \lambda_D - 9 \lambda_E - 5 \lambda_F \geq 0 \\
& 1.5 \lambda_A + 6 \lambda_B + 8 \lambda_C + 6 \lambda_D + 9 \lambda_E + 1.5 \lambda_F \geq 1.5 \\
& \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_E + \lambda_F = 1
\end{aligned}$$

Matematiksel programlama çözücü yardımıyla bulunan optimal θ_k değerleri A , B , C ve D için 1.0'dır. E ve F için bulunan değerler ise sırasıyla 0.75 ve 0.70'tir. Bu sonuçlar Tablo 4.3 τ_t sütununda verilen değerlerle aynıdır. Teknik etkinlik skorunun her karar birimi için bulunmuş olmasına rağmen ölçeğe göre getirinin yönü hakkında yorum yapılamamaktadır. m_I modelinin ise, teknik etkinlik skorunun yanında, optimum çözümde yer alan μ_0 karar değişkeniyle ölçeğe göre getirinin yönünü gösterdiği hatırlanacaktır. m_I modelinin sağladığı bu bilgiye ulaşmak için e_I modelinde küçük bir değişiklik yapılarak tekrar çözülmesi gerekmektedir.

İlk olarak e_I modeli her karar birimi için çözümlenerek teknik etkinlik skorları bulunmalıdır. Ardından, *ölçeğe göre artmayan getiri* (**Non-Increasing Return to Scale-NIRS**) varsayımını eklemek için $\Sigma\lambda = 1$ konvekslik kısıt, $\Sigma\lambda \leq 1$ ile değiştirilmelidir:

Model NIRS_I :

min θ_k

s.t.

$$\theta_k X_{ik} - \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} \geq Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_{jk} \leq 1$$

$$\lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N$$

Eğer karar biriminin ölçek etkisizliği varsa, *NIRS* modeli ile ölçeğe göre değişken getiri (*VRS*) varsayımı olan e_I modelinin çözümlerinin farklı bulunması sonucunda ilgili karar biriminin *ölçeğe göre artan getiri* özelliği gösterdiği söylenir. Aksi takdirde -çözümlerin aynı olması halinde karar birimi için *ölçeğe göre azalan getiri* sergilemekte olduğu yorumu yapılır.

Benzer şekilde, *ölçeğe göre azalmayan getiri* (**Non-Decreasing Return to Scale-NDRS**) varsayımını eklemek için $\Sigma\lambda = 1$ konvekslik kısıtı,

DMU	CRS	VRS	NIRS	NDRS	Ölçek
A	0.32	1.00	0.32	1.00	IRS
B	0.90	1.00	0.90	1.00	IRS
C	1.00	1.00	1.00	1.00	CRS
D	0.75	0.83	0.75	0.83	IRS
E	0.75	1.00	1.00	0.75	DRS
F	0.23	0.70	0.23	0.70	IRS

Tablo 4.5: NIRS ve NDRS sonuçları

$\Sigma\lambda \geq 1$ ile değiştirilmelidir:

Model NDRS_I :

min θ_k

s.t.

$$\theta_k X_{ik} - \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

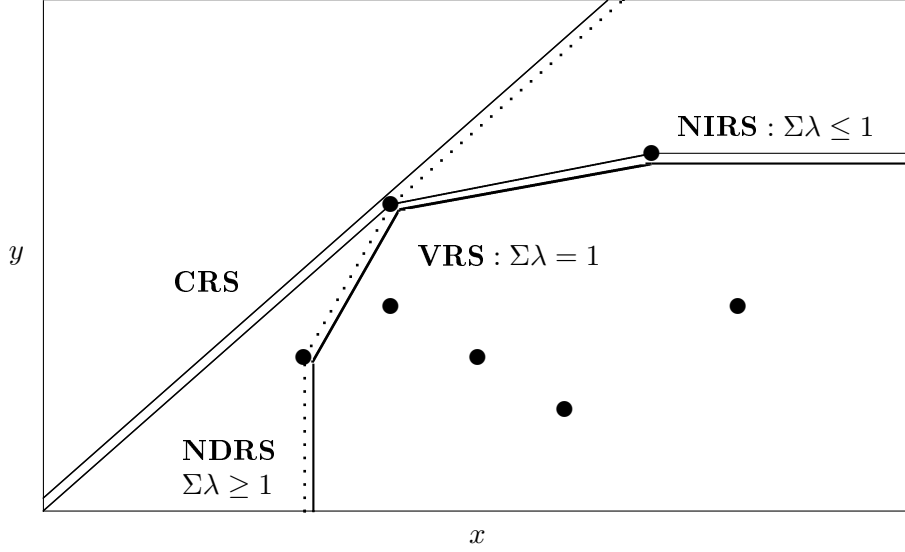
$$\sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} \geq Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_{jk} \geq 1$$

$$\lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N$$

Eğer karar biriminin ölçek etkinsizliği varsa, *NDRS* modeli ile ölçeğe göre değişken getiri (*VRS*) varsayımı olan e_I modelinin çözümlerinin farklı bulunması sonucunda ilgili karar biriminin *ölçeğe göre azalan getiri* özelliği gösterdiği söylenir. Aksi takdirde -çözümlerin aynı olması halinde- karar birimi için *ölçeğe göre artan getiri* sergilemekte olduğu yorumu yapılır.

Şekil 4.4 yardımıyla yukarıda verilen tespitler daha açık olarak görülebilir. Tekrar örneğe dönülürse, *NIRS* ve *NDRS* modelleri için bulunan çözümler ile Tablo 4.5 oluşturulmuştur. Karar birimleri *A*, *B*, *D* ve *F* için *VRS* ve *NIRS* varsayımı altında bulunan etkinlik skorları karşılaştırıldığında değerlerin farklı olduğu görülür. Bundan dolayı bu karar birimlerinin ölçeğe göre artan getiri bölgesinde oldukları sonucuna varılır. Karar



Şekil 4.4: NIRS ve NDRS

birimi E için aynı inceleme yapıldığında VRS ve $NIRS$ değerlerinin aynı olduğu görülür; sonuç olarak, E ölçeğe göre azalan getiri özelliği göstermektedir. Karar birimi C toplam etkin bulunduğu için ölçek etkisizliği olmadığı sonucuna varılır.

Aynı inceleme VRS ve $NDRS$ sütunlarının karşılaştırılması sonucu da elde edilebilir. A , B , D ve F karar birimlerinin VRS ve $NDRS$ varsayımı altında bulunan etkinlik skorları aynıdır. Dolayısıyla, ölçeğe göre artan getiri özelliği göstermektedirler. Halbuki, karar birimi E için VRS ve $NDRS$ altında etkinlik skorlarının farklı olduğu görülerek, ölçeğe göre azalan getirinin varlığı belirlenmiştir.

Son olarak, Banker tarafından ifade edilen Bağntı (4.1) (s.101) yardımıyla karar birimlerinin ölçeğe göre etkinliklerinin değişimi incelenecektir. Uygunluk açısından karar birimlerinin etkinliklerinin bulunmasında kullanılan M_I modelinin düal değişkenleri Tablo 4.6 kapsamında aşağıda verilmiştir. A , B , D ve F karar birimlerinin optimal çözümdeki düal değişken değerlerinin toplamı sırasıyla 0.186, 0.750, 0.750 ve 0.186'dır. $\Sigma\lambda < 1$ koşulu gerçekleştiği için Bağntı (4.1) ölçeğe göre artan getirinin

DMU	λ_A	λ_B	λ_C	λ_D	λ_E	λ_F
<i>A</i>	0.0	0.0	0.186	0.0	0.0	0.0
<i>B</i>	0.0	0.0	0.750	0.0	0.0	0.0
<i>C</i>	0.0	0.0	1.000	0.0	0.0	0.0
<i>D</i>	0.0	0.0	0.750	0.0	0.0	0.0
<i>E</i>	0.0	0.0	1.125	0.0	0.0	0.0
<i>F</i>	0.0	0.0	0.186	0.0	0.0	0.0

Tablo 4.6: M_I Örneği, Optimal Düal Değişken Değerleri

var olduğunu söylemektedir. Beklendiği üzere, düal değişkenlerin toplamı C için ölçeğe göre sabit getiriye gösteren 1.0 ve E için ölçeğe göre azalan getiriye gösteren 1.125'dir.

Bu noktaya kadar yapılan yorumların optimal çözümün tek olması halinde geçerli olduğu unutulmamalıdır. Alternatif optimal çözümlerin bulunması halinde ölçeğe göre getirinin yönünün belirlenmesine ilişkin olarak sonraki kısımda Banker ve Thrall'ın bulguları incelenmiştir.

4.6 Alternatif Çözüm ve Ölçeğe Göre Getiri

Banker'ın [6] çalışması CCR modeline dayanarak tek optimal çözüm bulunduğu MPSS'ı belirlemeye yöneliktir. Benzer şekilde, Banker, Charnes ve Cooper'ın [13] çalışmaları tek bir optimal çözümü bulunan BCC modelini vermektedir. Uygulamaların çoğunluğunda birden çok optimal çözümün bulunduğu görülmektedir. Bununla ilgili olarak Charnes, Cooper ve Thrall [45], [46], Seiford ve Thrall [111] ve Thrall [134] incelenebilir. Dolayısıyla, çok çözümlü durumlar için ölçeğe göre getirinin yönünün belirlenmesi sorununu çözecek yaklaşımlara ihtiyaç duyulmuştur. Bu bağlamda Banker ve Thrall tarafından gerçekleştirilen [18] alternatif çözümlerin bulunması halinde ölçeğe göre getirinin yönünün belirlenmesi problemine çözüm getirmektedir. Bu kısımda Banker ve Thrall'ın bu çalışması ele alınmış ve bir açıklayıcı örnek verilmiştir.

Bu alanda gerçekleştirilen diğer önemli çalışmaların başında Fare, Grosskopf ve Lovell'in [64] ve Fare ve Grosskopf'un [62] çalışmaları gelmektedir. Bahsedilen çalışmalarda *ölçek etkinliği endeksi metodu* adı ve-

rilen bir yaklaşım önerilmiştir. Ölçek etkinliği endeksi metodu, *CCR* ve *BCC* modellerinin aksine alternatif optimal çözümlerin bulunması halinde de ölçek değerlendirmesini doğru şekilde yapabilmektedir.

Değinilmesi gereken diğer çalışmalar arasında Banker, Bardhan ve Cooper [10], Banker, Chang ve Cooper [11], Zhu ve Shen [141] ve Tone [135] bulunmaktadır. Yeni katkılar ve konuyla ilgili bir tarama için [112] incelenmelidir.

İnceleme girdiye yönelik olarak yapılacaktır. Ancak, benzer şekilde, çıktıya yönelik olarak da tasarlanabilir. İlk olarak MPSS ile ilgili bir önerme verilecektir.

Önerme 4.3. *Mümkün bir üretim karışımını gösteren $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in \Omega$ yalnız ve yalnız teknik ve ölçek etkinlik skorlarınının 1.0 olması halinde, $\theta_{CCR}^* = 1$, bir MPSS tanımlamaktadır.*

İspat. Eğer $\theta_{CCR}^* < 1$, o zaman

$$\bar{\theta}_0 \vec{x}_0 \geq \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j \vec{x}_j$$

ve

$$\vec{y}_0 \leq \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j \vec{y}_j$$

olmak üzere $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_0 < 1$, ve $\bar{\lambda}_j, \bar{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$ şeklinde bir optimal çözüm vardır. $\bar{\Lambda} = \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j$ olsun. O zaman $(\bar{\theta}_0 \vec{x}_0 / \bar{\Lambda}, \vec{y}_0 / \bar{\Lambda}) \in \Omega$, ve $(\bar{\theta}_0 / \bar{\Lambda}) / (1 / \bar{\Lambda}) = \bar{\theta}_0 < 1$, olduğu için (\vec{x}_0, \vec{y}_0) bir MPSS değildir.

Tersi olarak, eğer (\vec{x}_0, \vec{y}_0) bir MPSS değilse, o zaman $(v\vec{x}_0, u\vec{y}_0) \in \Omega$, $0 \leq v < u$ şeklinde tanımlanan bir mümkün üretim karışımı bulunabilir. $(v\vec{x}_0, u\vec{y}_0) \in \Omega$ olduğu için,

$$v\vec{x}_0 \geq \sum_{j=1}^N \mu_j \vec{x}_j$$

ve

$$u\vec{y}_0 \leq \sum_{j=1}^N \mu_j \vec{y}_j$$

şartları altında $\sum_{j=1}^N \mu_j = 1$ olmak üzere $\mu_j \geq 0$ vardır. $\lambda_j = \mu_j / u$ ve $\theta = v / u$ tanımlaması yapılırsa ve $\theta < 1$, θ ile λ_j , $j = 1, \dots, N$ birlikte E_I modelinin çözümünü verirler. Diğer bir deyişle, $\theta_{CCR}^* = \min \theta_{CCR} \leq \theta < 1$. \square

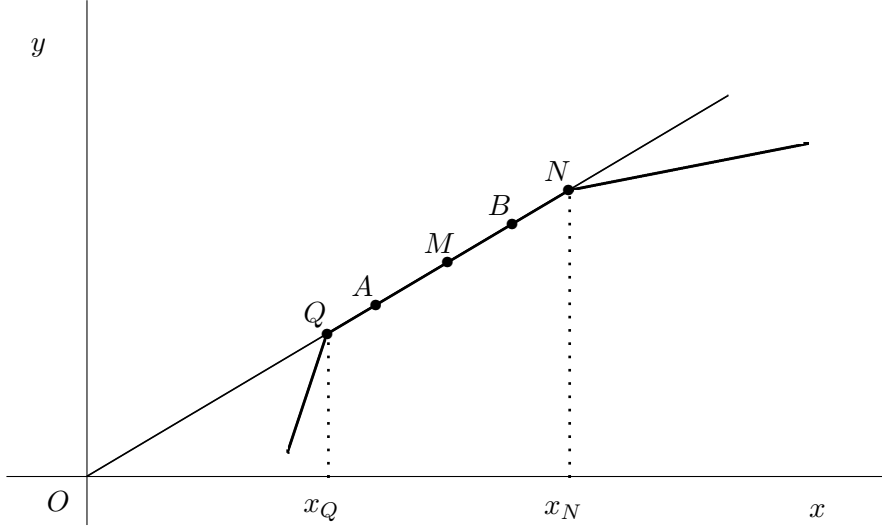
DMU	x	y	$\lambda_{j \neq B} = 0$ λ_B	$\lambda_{j \neq G} = 0$ λ_G	$\lambda_{j \neq C} = 0$ λ_C
A	3.50	1.5	0.250	0.2143	0.1875
B	4.50	6.0	1.000	0.8571	0.7500
C	6.00	8.0	1.333	1.1429	1.0000
D	6.00	6.0	1.000	0.8571	0.7500
E	9.00	9.0	1.500	1.2857	1.1250
F	5.00	1.5	0.250	0.2143	0.1875
G	5.25	7.0	1.166	1.0000	0.8750

Tablo 4.7: Alternatif Optimal Çözüm için Örnek

Bağıntı 4.7. Eğer θ_{CCR}^* , λ_j^* , $j = 1, \dots, N$, E_I modelinin optimal çözümlerinden bir tanesi ise, o zaman $\Lambda^* = \sum_{j=1}^N \lambda_j^*$ olmak üzere $(\theta_{CCR}^* \vec{x}_0 / \Lambda^*, \vec{y}_0 / \Lambda^*) \in \Omega$ bir MPSS gösterir.

Alternatif optimal çözümler bulunduğu için $\sum_{j=1}^N \lambda_j^* \neq 1$ ifadesinin sağlanması (\vec{x}_0, \vec{y}_0) 'nin bir MPSS gösteremeyeceği anlamına gelmez. Öte yandan, Önerme (4.3) herhangi bir MPSS için $\theta_{CCR}^* = 1$ ve $\sum_{j=1}^N \lambda_j^* = 1$ koşulunu sağlayan en az bir optimal çözüm olması gerektiğini söylemektedir. Böyle bir çözüm $\lambda_0^* = 1$ ve $j = 0$ haricindeki tüm j 'ler için $\lambda_j^* = 0$ olmak üzere bulunabilir. Şekil 4.3 bu duruma bir örnek oluşturmaktadır. Bu şekilde yer alan B , G ve C karar birimleri görelili maksimum verimliliğe sahip oldukları için MPSS olarak değerlendirilirler. Ancak, $x_B < x_G < x_C$ olduğu açıktır. Karar birimi C 'nin toplam etkinliğini ölçmek için kurulacak olan E_I modelinde $\theta_C^* = 1$, $\lambda_B^* = x_C/x_B = y_C/y_B > 1$, ve $\lambda_j^* = 0, \forall j \neq B$ olacaktır. Böylece, bu optimum çözüm için $\sum_{j=1}^N \lambda_j^* > 1$ 'dir; fakat, bu durum C 'nin MPSS olduğu gerçeğini değiştirmez. Örnek sayısal olarak ele alındığında ve ilgili modeller çözüldüğünde elde edilen sonuçlar Tablo 4.7 olarak verilmiştir.

Örnek ilk olarak $\lambda_{j \neq B} = 0$ yazılarak çözüm alınmıştır. $\lambda_B \neq 0$ durumu için karar birimleri C ve G 'nin toplam etkinliği incelendiğinde beklendiği gibi $\theta_C^* = 1$ ve $\theta_G^* = 1$ bulunmuştur. Bu çözümlerde, $\lambda_B^* = x_C/x_B = y_C/y_B = 1.333 > 1.0$ ve $\lambda_B^* = x_G/x_B = y_G/y_B = 1.166 > 1.0$ 'dır. Bunu takiben, benzer şekilde, $\lambda_{j \neq G} = 0$ koşulu altında bulunan çözüm karar birimleri B ve C için $\lambda_G^* = x_B/x_G = y_B/y_G = 0.8571 < 1.0$ ve $\lambda_G^* = x_C/x_G = y_C/y_G = 1.1429 > 1.0$ 'dır. Son olarak, $\lambda_{j \neq C} = 0$ ko-



Şekil 4.5: Çoklu MPSS

şulu altında bulunan çözüm karar birimleri B ve G için $\lambda_C^* = x_B/x_C = y_B/y_C = 0.75 < 1.0$ ve $\lambda_C^* = x_G/x_C = y_G/y_C = 0.875 < 1.0$ 'dır.

Açıktır ki, teknik etkin olan mümkün bir üretim karışımının ölçek etkinliğinin tam olması yalnız ve yalnız üretim yapılan ölçekte verimliliğin maksimize edilmesiyle mümkündür. Bu yüzden ölçek etkinliği, verilen girdi çıktı karışımıyla, olabilecek en yüksek verimlilik düzeyinde üretim yapmayı sağlayacak ölçek büyüklüğüne sahip olunduğunu göstermektedir. Verilen girdi çıktı karışımı için geçerli olan birden fazla MPSS bulunması olasıdır. Bu hususla ilgili bir önerme şöyledir:

Önerme 4.4. *Eğer, $A \equiv (x_A\vec{x}_0, y_A\vec{y}_0) \in \Omega$ ve $B \equiv (x_B\vec{x}_0, y_B\vec{y}_0) \in \Omega$ olmak üzere A ve B noktaları MPSS belirtiyorlarsa, o zaman $x_M = \alpha x_A + (1 - \alpha)x_B$ ve $y_M = \alpha y_A + (1 - \alpha)y_B$ olarak tanımlanmak üzere, $M \equiv (x_M\vec{x}_0, y_M\vec{y}_0) \in \Omega$ da bir MPSS'dir.*

İspat. Eğer A ve B noktaları MPSS ise, $i = A, B$ için $v/u \geq x_i/y_i$, ve tüm $(v\vec{x}_0, u\vec{y}_0) \in \Omega$. Bu yüzden m maksimum verimliliği göstermek üzere $x_A/y_A = x_B/y_B = m$ 'dir. Ayrıca, $x_M = \alpha x_A + (1 - \alpha)x_B = m[\alpha y_A +$

$(1 - \alpha)y_B] = my_M$ ve böylece $x_M/y_M = m$. Sonuç olarak M noktası da bir MPSS'dir. \square

Üretim imkanları kümesi Ω için, m maksimum verimlilik ve $x \in [x_Q, x_N]$ olarak tanımlanırsa, $(x\vec{x}_0, mx\vec{y}_0)$ bir MPSS olacak şekilde $x_Q, x_N \in \mathcal{R}$ bulunabilir. Böylece, $\Upsilon \equiv \{x|x \in \mathcal{R} \quad (x\vec{x}_0, y\vec{y}_0) \in \Omega, \quad \exists y > 0\}$ üç farklı bölgeye ayrılabilir. $x < x_Q$ veya $x > x_N$ için hiçbir $(x\vec{x}_0, y\vec{y}_0) \in \Omega$ MPSS olamaz; çünkü, $y < mx$ 'dir. Halbuki, $x \in [x_Q, x_N]$ için tüm mümkün teknik etkin üretim karışımları $(x\vec{x}_0, mx\vec{y}_0)$ formundadır ve böylece hepsi MPSS'dir.

Ekonomi literatüründe tanımlandığı şekliyle, tek çıktı durumu için ölçeğe göre getiri, eğer (**R**eturns **T**o **S**cale-RTS) tüm girdilerde meydana gelen oransal artış çıktıda daha büyük bir oransal artışa sebep oluyorsa *artan* türdedir. RTS kavramını çok çıktı durumunu içerecek şekilde genişletmek için girdi ve çıktı karışımı değişmeden oransal olarak artış esas alınacaktır. Banker ve Thrall'ın bu yaklaşımı Panzar ve Willig [100] ve Banker [6], [9] ile paralellik içindedir. Bu bağlamda, üretim imkanları kümesi Ω ve $P(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \equiv \{(x, y)|\vec{x} = x\vec{x}_0, \vec{y} = y\vec{y}_0, \quad x, y \geq 0\}$ düzleminin kesişimi incelenecektir. $P(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ 'nin görüntüsü

$$\mathcal{F}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \equiv \left\{ (x, y) \mid x\vec{x}_0 \geq \sum_{j=1}^N \lambda_j \vec{x}_j, \quad y\vec{y}_0 \leq \sum_{j=1}^N \lambda_j \vec{y}_j, \right. \\ \left. \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0 \right\} \quad (4.41)$$

RTS özelliği sadece teknik etkin olan noktalarda incelenecektir. Bu bağlamda, $\vec{\mu}^*$, $\vec{\nu}^*$ ve μ_0^* teknik etkin olan (\vec{x}_0, \vec{y}_0) karar birimi için kurulan m_I modelinin optimal çözümünü gösterebilir. (\vec{x}_0, \vec{y}_0) teknik etkin olduğu için $\sum_{r=1}^s \mu_{r0}^* Y_{r0} - \mu_0^* = 1 = \sum_{i=1}^m \nu_{i0}^* X_{i0}$. Bu çözüm üretim imkanları kümesini (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktasında destekleyen bir hiperdüzlem tanımlamaktadır. Bu hiperdüzlemin $\vec{x} = x\vec{x}_0, \vec{y} = y\vec{y}_0$ düzlemi ile kesişiminin \mathcal{F} 'deki görüntüsü $(\vec{\mu}^* \vec{y}_0)y = (\vec{\nu}^* \vec{x}_0)x + \mu_0^*$ 'dir. Eğer bu çizilebilecek tek teğet doğrusu ise RTS ölçüsü yukarıda gösterildiği şekilde $(\vec{\nu}^* \vec{x}_0)/(\vec{\mu}^* \vec{y}_0) = 1/(\vec{\mu}^* \vec{y}_0) = 1/(1 + \mu_0^*)$ olarak bulunur. Tek teğet olma durumunu genelleştirmek için aşağıdaki tanımlar verilmiştir.

Tanım 4.1.

- (a) (\vec{x}_0, \vec{y}_0) karışımı için en büyük ölçek büyüklüğü, yalnız ve yalnız $(k\vec{x}_0, y\vec{y}_0) \in \Omega$, $\exists y > 0$ ve $x \leq k$ her $(x\vec{x}_0, y\vec{y}_0) \in \Omega$ olmak üzere, $k\vec{x}_0$ 'dir.
- (b) (\vec{x}_0, \vec{y}_0) karışımı için en küçük ölçek büyüklüğü, yalnız ve yalnız $(k\vec{x}_0, y\vec{y}_0) \in \Omega$, $\exists y > 0$ ve $x \geq k$ her $(x\vec{x}_0, y\vec{y}_0) \in \Omega$ olmak üzere, $k\vec{x}_0$ 'dir.
- (c) (\vec{x}_0, \vec{y}_0) karışımı yalnız ve yalnız en büyük veya en küçük ölçek büyüklüğüne sahip ise *ekstrem ölçek büyüklüğü*dedir denir.

Tanım 4.2.

- (a) Eğer (\vec{x}_0, \vec{y}_0) teknik etkinse ve \vec{x}_0 ilgili girdi-çıkıtı karışımı için en büyük ölçek büyüklüğü değilse, o zaman (\vec{x}_0, \vec{y}_0) 'da sağ taraf *ölçek esnekliği*ni gösteren ρ_0^+ 'nın tanımı $\rho_0^+ \equiv \min\{\beta/\alpha \mid \alpha y = \beta x + \alpha - \beta, (1,1) \text{ noktasında } \mathcal{F}' \text{ye teğettir}\}$.
- (b) Eğer (\vec{x}_0, \vec{y}_0) teknik etkinse ve \vec{x}_0 ilgili girdi-çıkıtı karışımı için en küçük ölçek büyüklüğü değilse, o zaman (\vec{x}_0, \vec{y}_0) 'da sol taraf *ölçek esnekliği*ni gösteren ρ_0^- 'nin tanımı $\rho_0^- \equiv \max\{\beta/\alpha \mid \alpha y = \beta x + \alpha - \beta, (1,1) \text{ noktasında } \mathcal{F}' \text{ye teğettir}\}$.
- (c) Eğer $\rho_0^+ = \rho_0^- = \rho_0$, o zaman ölçeğe göre getirinin (RTS) ölçüsü ρ_0 'dır.

Tanım 4.3. Eğer (\vec{x}_0, \vec{y}_0) teknik etkinse, fakat ekstrem ölçek büyüklüğünde değilse, o zaman

- (a) (\vec{x}_0, \vec{y}_0) 'da *ölçeğe göre artan getiri* yalnız ve yalnız $\rho_0^- \geq \rho_0^+ > 1$ ise vardır.
- (b) (\vec{x}_0, \vec{y}_0) 'da *ölçeğe göre sabit getiri* yalnız ve yalnız $\rho_0^- \geq 1 \geq \rho_0^+$ ise vardır.
- (c) (\vec{x}_0, \vec{y}_0) 'da *ölçeğe göre azalan getiri* yalnız ve yalnız $1 > \rho_0^- \geq \rho_0^+$ ise vardır.

Bu noktada, çok-girdi çok-çıkıtı durumu için, m_I modeli yardımıyla ölçeğe göre getirinin yönünün belirlenmesi problemi tartışılacaktır. Bu model (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktasında teknik etkinliği ϕ_0^* ile vermektedir. Önerme (4.5), m_I modelinin optimal çözümünden bulunan μ_0^* ve teknik etkin olan $(\phi_0^* \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ noktasındaki ölçeğe göre getiri arasında ilişki kurmaktadır.

Önerme 4.5. *Eğer (\vec{x}_0, \vec{y}_0) teknik etkin fakat ekstrem ölçek büyüklüğünde olmayan bir nokta ise, o zaman*

- (a) (\vec{x}_0, \vec{y}_0) 'da ölçeğe göre artan getiri yalnız ve yalnız m_I modelinin tüm optimal çözümleri için $\mu_0^* < 0$ ise vardır.
- (b) (\vec{x}_0, \vec{y}_0) 'da ölçeğe göre sabit getiri yalnız ve yalnız m_I modelinin bazı optimal çözümleri için $\mu_0^* = 0$ ise vardır.
- (c) (\vec{x}_0, \vec{y}_0) 'da ölçeğe göre azalan getiri yalnız ve yalnız m_I modelinin tüm optimal çözümleri için $\mu_0^* > 0$ ise vardır.

İspat. Eğer teknik etkin olan (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktası için m_I modelinin optimal çözümü $\vec{\mu}^*$, \vec{v}^* ve μ_0^* ile gösterilirse, o zaman $\vec{\mu}^* \vec{y}_0 - \mu_0^* = 1 = \vec{v}^* \vec{x}_0$ 'dır. Ayrıca, $\vec{\mu}^* \vec{y}_0 = \vec{v}^* \vec{x}_0 - \mu_0^*$, (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktasında Ω 'ya destek olan bir hiperdüzlemdir ve $(\vec{\mu}^* \vec{y}_0)y = (\vec{v}^* \vec{x}_0)x + \mu_0^*$, \mathcal{F} 'ye $(1, 1)$ 'de teğettir. Bu teğetin eğimi $(\vec{v}^* \vec{x}_0)/(\vec{\mu}^* \vec{y}_0) = 1/(\vec{\mu}^* \vec{y}_0) = 1/(1 + \mu_0^*)$ olarak ifade edilir. Böylece, $\rho_0^+ = \min\{1/(1 + \mu_0^*)\}$ ve $\rho_0^- = \max\{1/(1 - \mu_0^*)\}$ yazılır. Buradan açıkça, $\rho_0^+ > 1$ şartının yalnız ve yalnız m_I 'nin tüm optimal çözümleri için $\mu_0^* < 0$ ve $\rho_0^- < 1$ şartının yalnız ve yalnız m_I 'nin tüm optimal çözümleri için $\mu_0^* > 0$ olması halinde mümkün olduğu görülür. Son olarak, $\max\{1/(1 + \mu_0^*)\} \geq 1 \geq \min\{1/(1 + \mu_0^*)\}$, m_I modelinin bazı optimal çözümleri için $1/(1 + \mu_0^*) = 1$ 'e karşılık gelmektedir. Böylece, ölçeğe göre sabit getirinin yalnız ve yalnız m_I modelinin bazı optimal çözümleri için $\mu_0^* = 0$ olması halinde mümkün olduğu görülür. \square

Önerme 4.6.

- (a) *Eğer (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktası teknik etkinse, fakat ekstrem ölçekte değilse, o zaman şu önermeler aynıdır:*
 - (\vec{x}_0, \vec{y}_0) , aynı girdi-çıkıtı karışımı için var olan tüm MPSS'lerden küçüktür.
 - (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktasında ölçeğe göre artan getiri vardır.
- (b) *Eğer (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktası teknik etkinse, fakat ekstrem ölçekte değilse, o zaman şu önermeler aynıdır:*
 - (\vec{x}_0, \vec{y}_0) bir MPSS'tir.
 - (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktasında ölçeğe göre sabit getiri vardır.
- (c) *Eğer (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktası teknik etkinse, fakat ekstrem ölçekte değilse, o zaman şu önermeler aynıdır:*

- (\vec{x}_0, \vec{y}_0) , aynı girdi-çıkıta karışımı için var olan tüm MPSS'lerden büyüktür.
- (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktasında ölçeye göre azalan getiri vardır.

İspat. (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktası için e_I modeli ile bulunan teknik etkinlik skoru θ_{BCC}^* ve E_I modeli ile bulunan toplam etkinlik skoru θ_{CCR}^* 1.0'a eşit olsun. M_I modeli için elde edilen optimal çözüm ve düal değişkenler $\vec{\lambda}^*$, $\vec{\mu}^*$ ve $\vec{\nu}^*$ olsun. Benzer şekilde m_I modelinin optimal çözümü $\vec{\lambda}^o$, $\vec{\mu}^o$, $\vec{\nu}^o$ ve μ_0^o olsun. O zaman, m_I modelinden

$$\vec{\mu}^o \vec{y}_0 - \mu_0^o = 1 \quad (4.42)$$

$$\vec{\nu}^o \vec{x}_0 = 1 \quad (4.43)$$

$$\mu^o y_j - \nu^o x_j - \mu_0^o = -G_j^o \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.44)$$

ve E_I ile düali M_I modelinden, $j = 1, \dots, N$ için,

$$-\sum_{j=1}^N \lambda_j \vec{x}_j + \theta_{CCR}^* \vec{x}_0 = \vec{S}^- \geq 0, \quad (4.45)$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \vec{y}_j - \vec{y}_0 = \vec{S}^+ \geq 0, \quad (4.46)$$

$$\vec{\mu}^* \vec{y}_j - \vec{\nu}^* \vec{x}_j = -\vec{G}_j^* \leq 0, \quad (4.47)$$

$$\vec{\mu}^* \vec{y}_0 = \theta_{CCR}^* \quad (4.48)$$

$$\vec{\nu}^* \vec{x}_0 = 1 \quad (4.49)$$

elde edilir.

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^* = 1 + \epsilon \quad (4.50)$$

olduğu varsayalım. Ardından, (4.44) λ_j^* ile çarpılıp j için toplanırsa,

$$\vec{\mu}^o \sum_{j=1}^N \lambda_j^* \vec{y}_j - \vec{\nu}^o \sum_{j=1}^N \lambda_j^* \vec{x}_j - \mu_0^o (1 + \epsilon) + \sum_{j=1}^N \lambda_j^* \vec{G}_j^o = 0 \quad (4.51)$$

bulunur. (4.45) ve (4.46) kullanılarak,

$$\vec{\mu}^o (\vec{S}^+ + \vec{y}_0) + \vec{\nu}^o (\vec{S}^- - \theta_{CCR}^* \vec{x}_0) - \mu_0^o (1 + \epsilon) + \sum_{j=1}^N \lambda_j^* \vec{G}_j^o = 0 \quad (4.52)$$

bulunur. (4.42) ve (4.43) kullanılarak, (4.52)

$$\bar{\mu}^o \bar{S}^+ + 1 + \mu_0^o + \bar{\nu}^o \bar{S}^- - \theta_{CCR}^* - \mu_0^o - \mu_0^o \epsilon + \sum_{j=1}^N \lambda_j^* \bar{G}_j^o = 0 \quad (4.53)$$

haline indirgenir. Bu ise,

$$A = 1 - \theta_{CCR}^* + \left(\bar{\mu}^o \bar{S}^+ + \bar{\nu}^o \bar{S}^- + \sum_{j=1}^N \lambda_j^* \bar{G}_j^o \right) \geq 0 \quad (4.54)$$

olmak üzere

$$\mu_0^o \epsilon = A \quad (4.55)$$

olarak yazılır. Açıkça görülmektedir ki,

$$\bar{\mu}^o \bar{S}^+ + \bar{\nu}^o \bar{S}^- + \sum_{j=1}^N \lambda_j^* \bar{G}_j^o \geq 0 \quad (4.56)$$

çünkü, terimlerin hiçbiri negatif değildir. Böylece, eğer $\theta_{CCR}^* < 1$ ise

$$\mu_0^o \epsilon > 0 \quad (4.57)$$

Böylece E_I ve m_I modellerinin çözümleri arasındaki ilişki, olabilecek iki durum incelenerek

$$\mu_0^o > 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{j=1}^N \lambda_j > 1, \text{ veya} \quad (4.58)$$

$$\mu_0^o < 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{j=1}^N \lambda_j < 1 \quad (4.59)$$

olarak ortaya konmuş olur.

Böylece, mümkün üretim karışımı için artan getiri mevcut tüm MPSS'lerden az, ve azalan getiri mevcut tüm MPSS'lerden fazla olunmasını gerektirir.

Bu noktada $\theta_{CCR}^* = 1$ durumuna bakılacaktır. (\bar{x}_0, \bar{y}_0) 'nin MPSS olması halinde Önerme (4.3), E_I modeli için $\theta_{CCR}^* = \sum_{j=1}^N \lambda_j^* = 1$ olması gerektiğini söylemektedir. Bu çözüm e_I modeli için de optimal çözüm olacaktır. Çünkü, e_I modeli E_I modeli ile karşılaştırıldığında tek farkın

konvekslik kısıtından, $\sum_{j=1}^N \lambda_j^* = 1$, kaynaklandığı görülmektedir. Çözümünden görüleceği üzere, bu kısıt zaten sağlanmaktadır. Böylece, e_I 'nin düali olan m_I modeline de $\mu_0^* = 0$ çözümü bulunacaktır. Sonuç olarak, Önerme (4.5) (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktasında ölçeğe göre sabit getirinin olacağını söylemektedir.

Tersi olarak, eğer (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktasında ölçeğe göre sabit getiri varsa ve m_I modelinin bazı optimal çözümleri için $\mu_0^* = 0$ ise, o zaman (4.55) ve (4.54) ifadelerinden $\theta_{CCR}^* = 1$ sonucuna varılır. Dolayısıyla, (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktası Önerme (4.3) yardımıyla MPSS olarak bulunur. \square

Böylece, E_I modelinin optimal çözümü $\theta_{CCR}^* = 1$ ise (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktası bir MPSS'dir ve bu noktada ölçeğe göre sabit getiri vardır. Eğer E_I modelinin çözümünde bazı optimal çözümler için $\theta_{CCR}^* < 1$ ve $\sum_{j=1}^N \lambda_j^* = 1$ ise, o zaman $(\theta_{CCR}^* \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ noktası bir MPSS'dir. Bu durumda, $\sum_{j=1}^N \lambda_j^* = 1$ olduğu için $\theta_{CCR}^* = \theta_{BCC}^* < 1$ 'dir. Dolayısıyla, (\vec{x}_0, \vec{y}_0) ölçek etkindir. Eğer $\theta_{BCC}^* = 1$ ve $\theta_{CCR}^* < 1$ ise, o zaman E_I 'nin hiç bir optimal çözümü için $\sum_{j=1}^N \lambda_j^* = 1$ olamaz. Sonuç olarak, eğer $\theta_{BCC}^* = 1$, $\theta_{CCR}^* < 1$ ve $\sum_{j=1}^N \lambda_j^* \leq 1$ ise (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktasında *ölçeğe göre artan getiri* vardır. Diğer şartlar aynı kalmak üzere, eğer $\sum_{j=1}^N \lambda_j^* \geq 1$ ise (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktasında *ölçeğe göre azalan getiri* vardır.

Benzer olarak, m_I modelinin optimal çözümünde $\mu_0^* = 0$ (ve $\theta_{BCC}^* = 1$) ise (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktası teknik etkin olan bir MPSS'dir ve ölçeğe göre sabit getiri vardır. Eğer $\mu_0^* \neq 0$ (ve $\theta_{BCC}^* = 1$) ise μ_0^* 'nin aldığı değere göre ölçeğe göre getirinin yönü ile ilgili yorum yapılabilir. Tüm optimal çözümler için $\mu_0^* > 0$ ($\mu_0^* < 0$) ise (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktasında *ölçeğe göre azalan getiri* (*ölçeğe göre artan getiri*) vardır. Fakat, eğer, μ_0^* bazı optimal çözümler için pozitif, diğerleri için negatif değer alıyorsa (\vec{x}_0, \vec{y}_0) noktasında *ölçeğe göre sabit getiri* vardır. Aşağıda, μ_0^* 'ın sınırları ile ilgili inceleme bulunmaktadır.

Uygunluk açısından, elde edilen bazı sonuçlar özet olarak şöyle verilebilir:

- Eğer $\theta_{CCR}^* < 1$ ise, o zaman tüm optimal çözümlerde ancak $\sum_{j=1}^N \lambda_j^* > 1$ ise $\mu_0^* > 0$, ve ancak $\sum_{j=1}^N \lambda_j^* < 1$ ise $\mu_0^* < 0$.
- Eğer $\theta_{CCR}^* = 1$ ise, o zaman bazı optimal çözümlerde $\sum_{j=1}^N \lambda_j^* = 1$ ve $\mu_0^* = 0$ 'dır.

<i>DMU</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
<i>y</i>	1.0	3.5	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
<i>x</i>	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0

Tablo 4.8: Banker-Thrall Örneği

Tek yerine birden çok (aslında sonsuz tane) destekleyen (teğet olan) hiperdüzlemin bulunduğu noktalarda ölçek esnekliğinin tek bir değerinin belirlenmesi yerine teğet eğimlerinin alt ve üst sınırlarının, ρ_o^+ ve ρ_o^- , bulunması gerekir. Bu tür sınırların bulunmasını sağlayacak olan doğrusal programlama modeli m_I 'dan hareketle türetilecektir. m_I 'nın amaç fonksiyonu

$$\max \quad \mu_0 \quad (4.60)$$

olarak değiştirilecek ve

$$\vec{\mu}\vec{y}_0 - \mu_0 = 1 \quad (4.61)$$

kısıtı eklenecektir. μ_0 'ın bulunan optimal değeri μ_0^+ olarak tanımlanacaktır. Benzer şekilde, amaç fonksiyonu

$$\max \quad -\mu_0 \quad (4.62)$$

olarak değiştirilecek ve μ_0 için bulunan optimal değer μ_0^- olarak tanımlanacaktır. Bulunacak olan optimal çözüm $\vec{\mu}^*$, \vec{v}^* ve μ_0^* 'dan

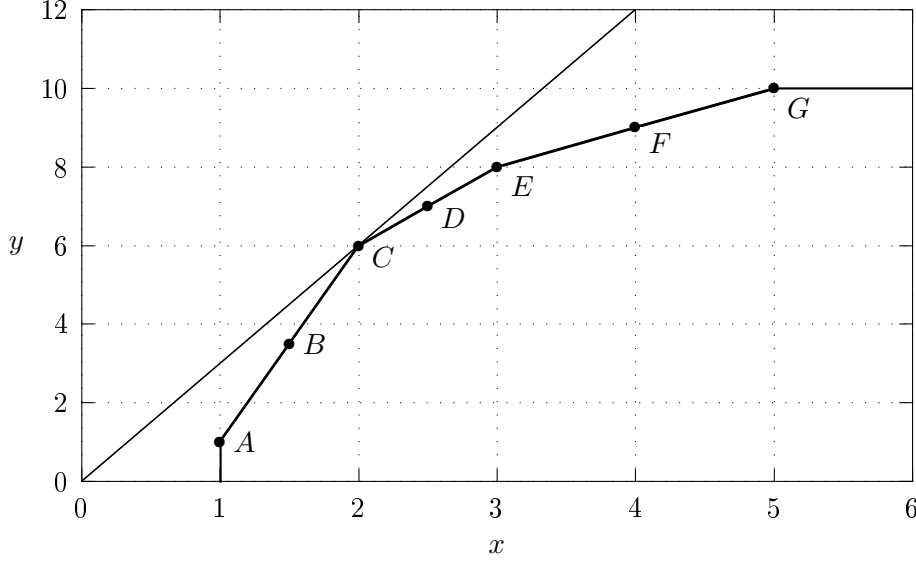
$$\mu_0^- \leq \mu_0^* \leq \mu_0^+ \quad (4.63)$$

ve sonuçta

$$\rho_0^+ = \frac{1}{1 + \mu_0^-} \geq \rho_0^* = \frac{1}{1 + \mu_0^*} \geq \rho_0^- = \frac{1}{1 + \mu_0^+} \quad (4.64)$$

elde edilecektir.

Yukarıda açıklanan sınırların bulunmasına ilişkin Banker ve Thrall'ın örneği aşağıda verilmiştir. İncelen karar birimi sayısı 7'dir. Sadece tek bir girdi ve tek bir çıktı bulunmaktadır. Karar birimlerinin üretim karışımları Tablo 4.8 ile gösterilmiştir. Örneğe ilişkin grafik Şekil 4.6 olarak verilmiştir. μ_0^+ ve μ_0^- değerlerinin hesaplanmasında kullanılan modeller şöyledir:



Şekil 4.6: Banker-Thrall Örneği

$\max \mu_0$	$\max -\mu_0$
st	st
$\nu_k x_k = 1$	$\nu_k x_k = 1$
$\mu_k y_k + \mu_0 = 1$	$\mu_k y_k + \mu_0 = 1$
$1.0 \mu_k - 1.0 \nu_k - \mu_0 \leq 0$	$1.0 \mu_k - 1.0 \nu_k - \mu_0 \leq 0$
$3.5 \mu_k - 1.5 \nu_k - \mu_0 \leq 0$	$3.5 \mu_k - 1.5 \nu_k - \mu_0 \leq 0$
$6.0 \mu_k - 2.0 \nu_k - \mu_0 \leq 0$	$6.0 \mu_k - 2.0 \nu_k - \mu_0 \leq 0$
$7.0 \mu_k - 2.5 \nu_k - \mu_0 \leq 0$	$7.0 \mu_k - 2.5 \nu_k - \mu_0 \leq 0$
$8.0 \mu_k - 3.0 \nu_k - \mu_0 \leq 0$	$8.0 \mu_k - 3.0 \nu_k - \mu_0 \leq 0$
$9.0 \mu_k - 4.0 \nu_k - \mu_0 \leq 0$	$9.0 \mu_k - 4.0 \nu_k - \mu_0 \leq 0$
$10.0 \mu_k - 5.0 \nu_k - \mu_0 \leq 0$	$10.0 \mu_k - 5.0 \nu_k - \mu_0 \leq 0$
μ_0 urs	μ_0 urs

Modellerin çözümünden elde edilen sonuç Tablo 4.9 ile gösterilmiştir.

Amaç fonksiyonunun $\max \mu_0$ ve $\max -\mu_0$ olduğu durumlar için bulunan μ_0 değerlerinden hareketle tanımlanan μ_0^- ve μ_0^+ değerleri ile bunlara bağlı olarak belirlenen ρ_0^- ve ρ_0^+ değerleri Tablo 4.10 olarak verilmiştir.

Amaç Fonk.	DMU_k	A	B	C	D	E	F	G
$\max \mu_0$	μ_0^*	-0.80	-0.53	0.50	0.40	1.66	1.25	$+\infty$
	μ_k^*	0.20	0.13	0.25	0.20	0.33	0.25	0.20
	ν_k^*	1.00	0.66	0.50	0.40	0.33	0.25	0.20
$\max -\mu_0$	μ_0^*	-1.00	-0.53	-0.40	0.40	0.33	1.25	1.00
	μ_k^*	0.00	0.13	0.10	0.20	0.16	0.25	0.20
	ν_k^*	1.00	0.66	0.50	0.40	0.33	0.25	0.20

Tablo 4.9: Banker-Thrall Örneği Sonuçları

DMU_k	A	B	C	D	E	F	G
μ_0^+	-0.80	-0.53	0.50	0.40	1.66	1.25	∞
μ_0^-	-1.00	-0.53	-0.40	0.40	0.33	1.25	1.00
ρ_0^-	5.00	2.14	0.66	0.71	0.38	0.44	0.00
ρ_0^+	$+\infty$	2.14	1.66	0.71	0.75	0.44	0.5
RTS	IRS	IRS	CRS	DRS	DRS	DRS	DRS

Tablo 4.10: Banker-Thrall, ρ_0^- ve ρ_0^+ Değerleri

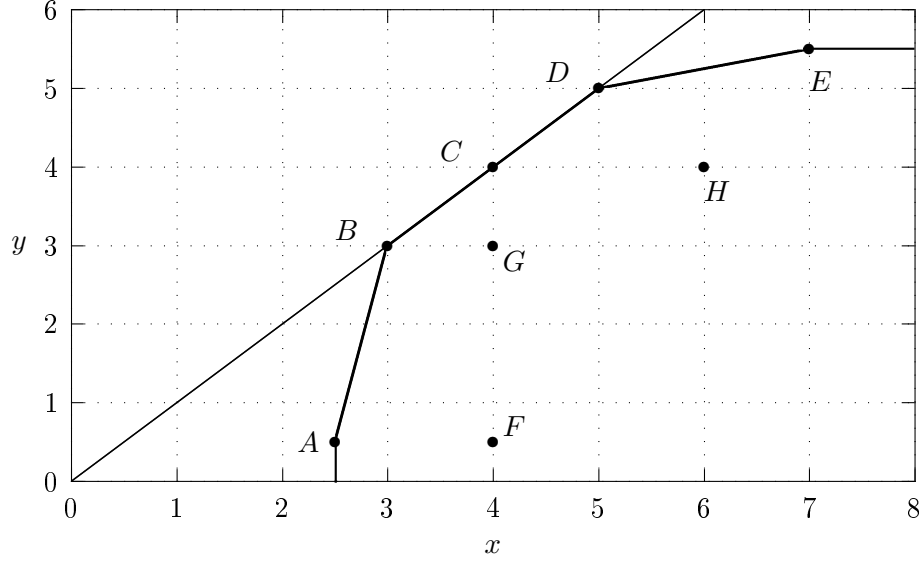
<i>DMU</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
<i>y</i>	2.5	3.0	4.0	5.0	7.0	4.0	4.0	6.0
<i>x</i>	0.5	3.0	4.0	5.0	5.5	0.5	3.0	4.0

Tablo 4.11: MPSS Bölgesi Örnek

Tablo 4.10 ile ilgili olarak yapılacak ilk yorum ölçeğe göre getirinin yönünün belirlenmesi ile ilgilidir. Tablodan görüleceği üzere, *A* ve *B* karar birimlerinin μ_0 için hesaplanan alt ve üst sınırlarının her ikisi de negatif olduğu için bu karar birimlerinin ölçeğe göre artan getiri bölgesinde oldukları söylenir. Ayrıca, bu karar birimleri için teğet eğimini veren ρ_0 'nun alt ve üst sınırı incelendiğinde değerlerin 1.0'dan büyük olduğu görülür. Diğer bir deyişle, girdi miktarındaki artış oransal olarak çıktı miktarında daha büyük bir artışa sebep olacaktır. Tanım gereği, ölçeğe göre artan getirinin var olduğu sonucuna varılır. *D*, *E*, *F* ve *G* karar birimlerinin μ_0 alt ve üst sınırları pozitif olduğu ve ayrıca ρ_0 değerleri 1.0'dan küçük olduğu için ölçeğe göre azalan getiri vardır değerlendirilmesi yapılır. Son olarak *C* karar birimi incelenirse, μ_0 'nun alt sınırının negatif ve üst sınırının pozitif olduğu görülür. μ_0 'ın optimum çözümde 0.0 değerini alabileceği olması sebebiyle MPSS olduğu söylenir. İlgili ρ_0 değerleri de aynı sonucu vermektedir. ρ_0 'ın alt ve üst sınırlarının sırasıyla 1.0'dan küçük ve büyük olması sebebiyle $\rho_0^* = 1.0$ olabileceği sonucuna varılır. Bu ise ölçeğe göre sabit getiriye işaret etmektedir.

Sonuçlarda dikkat çeken bir nokta bazı karar birimleri için μ_0 ve ρ_0 'a ilişkin alt ve üst sınırların aynı olurken, diğerleri için bu değerlerin farklı olmasıdır. Örneğin, *B*, *D*, *F* karar birimleri için alt ve üst sınırlar aynıdır. Öte yandan, *A*, *C*, *E* ve *G* karar birimleri için alt ve üst sınırı belirli bir aralık tanımlanmıştır. Bu karar biriminin ekstrem nokta olmasıyla ilişkilidir. *B* gibi bir karar birimi *A* ve *C* karar birimlerinin bir kombinasyonu olduğu için tek bir hiperdüzlem ile desteklenmektedir ve dolayısıyla μ_0 ve ρ_0 değerleri ilgili hiperdüzleme bağlı olarak tek bir değer almaktadır.

Farklı ölçeklerin MPSS olabileceği bir durumu incelemek üzere ikinci bir örnek ele alınacaktır. İlgili veri Tablo 4.11 ile gösterilmiştir. Veri çerçevesinde çizilen grafik analiz edilen 8 karar biriminden, 5 tanesinin etkin sınır üzerinde bulunduğunu göstermektedir. *F*, *G* ve *H* karar birimleri teknik etkinsiz oldukları için zarfın içinde kalmışlardır. İlk 5 karar birimi



Şekil 4.7: MPSS Bölgesi Örnek

için çözülen modellerden elde edilen sonuçlar Tablo 4.12 olarak düzenlenmiştir. Sonuçlardan görüleceği üzere, B , C ve D karar birimleri için μ_0 alt ve üst sınırları 0.0 değerini kapsamakta ve böylece karar birimlerinin birer MPSS olduğu söylenebilmektedir. Ekstrem noktalar olan B ve D için bir aralık belirlenirken, C karar birimi için beklendiği gibi sadece tek bir değer (0.0) bulunmuştur. A ve E karar birimleri ise sırasıyla ölçeğe göre artan ve azalan getiri özelliği göstermektedirler.

DMU_k	A	B	C	D	E
μ_0^+	-0.96	0.00	0.00	3.00	$+\infty$
μ_0^-	-1.00	-0.80	0.00	0.00	2.14
ρ_0^-	25.00	1.00	1.00	0.25	0.00
ρ_0^+	$+\infty$	5.00	1.00	1.00	0.32
RTS	IRS	CRS	CRS	CRS	DRS

Tablo 4.12: ρ_0^- ve ρ_0^+ Değerleri

Bölüm 5

DEA ve Tahsis Etkinliği

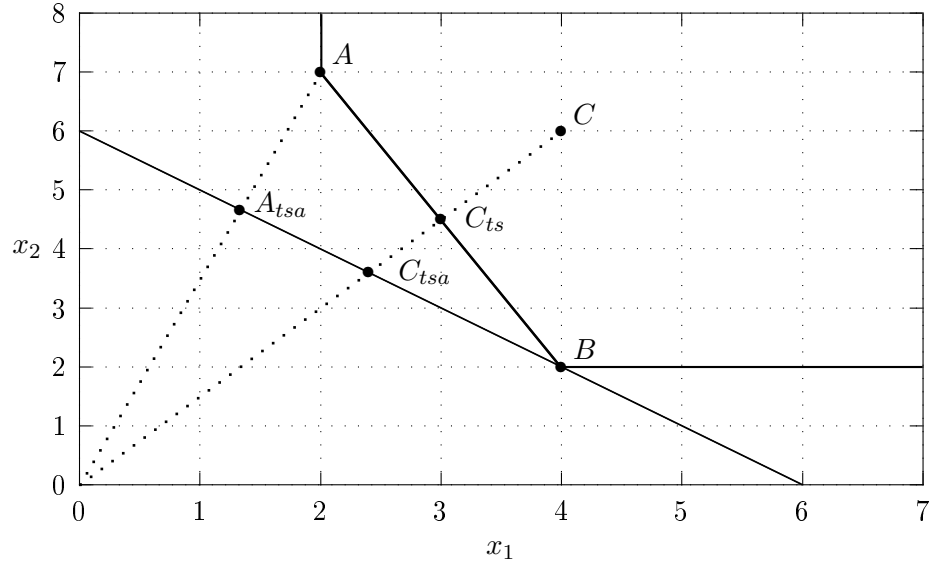
Girdi-çıkıtı faktör fiyatları veri olduğu ve maliyet minimizasyonu veya kâr maksimizasyonu amaçlandığı zaman teknik ve ölçek etkinliğinin yanında *tahsis etkinliği* de ölçülebilir. Tahsis etkinliği girdiye veya çıktıya yönelik olarak tasarlanabilir. Girdiye yönelik olarak tasarlanan tahsis etkinliğinde, mevcut üretim teknolojisi altında girdi faktör fiyatlarına bağlı olarak, girdi karışımının toplam maliyeti minimize eden karışımla kıyaslanması esastır. Benzer şekilde çıktıya yönelik tahsis etkinliği de tanımlanabilir. Daha önce değinildiği üzere tahsis etkinliği *fiyat etkinliği* ile aynı anlamda kullanılmıştır. Tahsis etkinliği ve toplam etkinliğin birleştirilmesi sonucunda *ekonomik etkinlik* elde edilmektedir.

Tahsis etkinliğinin hesaplanması bir örnek üzerinden aşağıda açıklanmıştır. İlgili örnekte yer alan karar birimleri ve kullandıkları iki tür girdi ile ürettikleri tek bir çıktıya ilişkin miktarlar Tablo 5.1 olarak verilmiştir. Her iki girdi faktörü içinde maliyetler aynıdır ve \$1.0'dır. İlk olarak, ölçeğe göre sabit getiri varsayımı altında, ölçek ve teknik etkinliğe karşılık gelen toplam etkinlik skoru bulunmuştur. Bunun için E_I modeli kullanılmıştır. Bulunan sonuçlar tabloda τ_{ts} sütununda verilmiştir.

İkinci olarak, kurulacak olan bir model yardımıyla üretim imkanları kümesinde yer alan ve en düşük maliyete sahip olan girdi karışımı bulunacaktır. Bu amaca yönelik olarak kurulan aşağıdaki modelin en düşük toplam üretim maliyetini vereceği kolaylıkla görülür. Modelin karar değişkenleri \vec{x}^* ile gösterilmiştir. \vec{p} , girdi faktör maliyetlerini göstermekte-

DMU_k	x_1	x_2	y	τ_{ts}	τ_a	τ_{tsa}
A	2	7	1	1.00	0.66	0.66
B	4	2	1	1.00	1.00	1.00
C	4	6	1	0.75	0.80	0.60

Tablo 5.1: Tahsis Etkinliği Örneği



Şekil 5.1: Tahsis Etkinliği Örneği

dir.

$$\begin{aligned}
 & \text{Model } X_i^* : \\
 & \min \\
 & \delta_k = \sum_{i=1}^m p_i X_i^* \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} Y_{rj} \geq Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \\
 & X_i^* - \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} X_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

Böylece, bu model yardımıyla üretim imkanları kümesinin elemanı olan, diğer bir deyişle mümkün olan, bir girdi karışımı bulunmuştur. Bu girdi karışımı en düşük maliyetle üretim yapılmasını sağladığı için mümkün en küçük eş-maliyet doğrusu ve üretim imkanları kümesinin kesişimi olan noktayı tanımlamaktadır. Çözülen doğrusal programlama modeli bu noktanın B olduğunu göstermiştir, $\vec{x}^* = [4.0, 2.0]$. Şekil 5.1 ile gösterilen grafik bu sonucu doğrulamaktadır.

Karar birimleri için *ekonomik etkinlik* tanımı

$$\tau_{tsa} = \frac{\sum_{i=1}^m p_i X_i^*}{\sum_{i=1}^m p_i X_{ik}} \quad (5.1)$$

olarak verilir [52]. Etkinliği gösteren τ için indis olan tsa 'da t : teknik etkinlik, s : ölçek etkinliği, ve a : tahsis etkinliğine karşılık gelmektedir. Bulunan ekonomik etkinlik skorları Tablo 5.1, τ_{tsa} sütununda listelenmiştir.

Son olarak *ekonomik etkinlik* = *toplam etkinlik* \times *tahsis etkinliği* tanımından hareketle tahsis etkinlik skorları

$$\tau_a = \frac{\tau_{tsa}}{\tau_{ts}} \quad (5.2)$$

bulunur. Bu sonuçlar da Tablo 5.1 kapsamında verilmiştir.

Maliyet minimizasyonu olarak tasarlanan süreç hasılat maksimizasyonu için de tasarlanabilir. Bunun için yapılması gereken, yukarıda verilen X_i^* modeli ile en uygun girdi vektörünü bulmak yerine, aşağıda verilmiş olan Y_r^* modeli yardımıyla en uygun çıktı karışımını tanımlamaktır.

$$\begin{aligned}
 & \text{Model } Y_r^* : \\
 & \max \\
 & \delta_k = \sum_{r=1}^s p_r Y_r^* \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} Y_{rj} \geq Y_r^* \quad r = 1, \dots, s \\
 & X_{ik} - \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} X_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

Hasılat maksimizasyonu durumunda karar birimleri için *ekonomik etkinlik* tanımı

$$\tau_{tsa} = \frac{\sum_{r=1}^s p_i Y_{ik}}{\sum_{r=1}^s p_i Y_i^*} \quad (5.3)$$

olarak verilir.

Maliyet minimizasyonu ve hasılat maksimizasyonu birlikte ele alındığında kâr maksimizasyonunu vermektedir. Bununla ilgili olarak Fare, Grosskopf ve Weber'in [69] çalışması incelenebilir. Konun aksiyomatik yapı içinde ele alındığı önemli bir kaynak ise Fare ve Grosskopf'a [63] aittir.

Bölüm 6

Dışsal Değişkenler

Etkinlik analizine konu olan karar birimlerinin üretim sürecinde kullandıkları faktörler yapısal farklılıklar göstermektedir. Bazı faktörler geleneksel girdi-çıkıtı faktörü olarak analize doğrudan dahil edilememektedir. Bu durum, özellikle, faktörlerin karar biriminin yöneticisi tarafından kontrol edilemediği ve değerlerinin dışsal olarak belirlendiği zaman söz konusudur. Yönetici tarafından kontrol edilemeyen bu faktörler *dışsal faktörler* veya *dışsal değişkenler* olarak adlandırılacaktır. Dışsal değişkenlere örnek olarak kamu/özel mülkiyet farkları, karar birimlerinin faaliyet gösterdikleri çevreye ilişkin sosyo-ekonomik farklar, ayrı bölgelerde yer alan karar birimlerini etkileyen farklı doğa şartları, kullanılan girdi faktörlerinin nitelik olarak farklılıkları, farklı hukuki çerçeve verilebilir. Bu tip farkların göz önüne alınmaması halinde etkinlik analizi sonuçlarının güvenilir olması beklenemez. Değerleri sabitlenmiş olan ve kontrol edilemeyen dışsal faktörlerin DEA analizine doğrudan dahil edilmesine ilişkin ilk çalışma Banker ve Morey [16] tarafından gerçekleştirilmiştir. Banker ve Morey'in bu çalışması ve izleyen [17] çalışması bu kısmın temel kapsamını oluşturmaktadır. Bu iki çalışma ile ilgili ayrıntılı incelemeye geçmeden önce, konuya ilişkin bazı yaklaşımlara değinilmiştir.

Dışsal değişken değerlerinin etkinlik üzerindeki etkisinin sıralamaya tabii tutulamadığı durumlar bulunmaktadır. Örneğin, kimi alanlarda kamu ve özel mülkiyet ayrımının etkinlik üzerinde belirleyici olduğunu *a priori* kabul etmek yanıltıcı olabilecektir. Bu gibi durumlarda Charnes, Cooper ve Rhodes [42] tarafından önerilen metodoloji kullanılabilir. Bu metodoloji üç aşamadan oluşmaktadır.

- (i) Örneklem homojen alt gruplara ayrılır. Örnek olarak, eğer uygulamada kamu ve özel mülkiyet ayrımının homojen yapıyı bozduğu düşünülüyorsa, kamu ve özele ait karar birimlerinin oluşturduğu iki ayrı alt grup tanımlanır.
- (ii) Tüm karar birimleri için kendi etkin sınırlarına bağlı olarak rol modelleri oluşturulur.
- (iii) Alt grupların rol modelleri bir araya getirilerek oluşturulan küme için DEA analizi yapılır ve alt grupların ortalama etkinlik skorlarının farkı incelenir.

Bu metot ile ilgili temel sorunlardan biri kıyaslamamanın yapılacağı kümelerin küçük olması sonucunda karar birimlerinin etkinlik skorlarının yüksek çıkması ve DEA'nın ayırıcı gücünün kaybolmasıdır. Bu metoda ilişkin bir diğer sorun, sadece tek bir dışsal değişkenin tanımlanabilmesidir. Ayrıca, dışsal değişkenin kategorik olması gerekmektedir. Buna ilişkin daha ayrıntılı bilgi §6.4 kapsamında verilmiştir.

Çoğu uygulamada, etkilemenin yönü bilinmemekte, ve hatta, sadece bu yönün belirlenmesi temel gaye olmaktadır. Bu gibi durumlarda kullanılmak üzere iki aşamalı bir süreç tanımlanabilir. İki aşamalı metot, ilk aşamasında sadece geleneksel girdi ve çıktılarının yer aldığı bir DEA modelinin çözülmesini, ve ikinci aşamada bulunan etkinlik skorları ile dışsal değişkenler arasında regresyon ifadesinin oluşturulmasını içerir. Regresyon denkleminde dışsal değişkenlerin katsayılarının işaretleri etkilemenin yönünü gösterecektir. İlişkinin gücünü görmek üzere standart hipotez testleri kullanılabilir. Ayrıca, regresyon katsayıları kullanılarak, DEA yardımıyla hesaplanmış bulunan etkinlik skorlarının düzeltilmesi yapılabilir.

Bu metot çerçevesinde sürekli ve kategorik değişkenler birlikte kullanılabilir. Hesaplama süreci sadece regresyon ve DEA hesaplamasını gerektirdiği için basittir. Ancak, standart en küçük kareler yöntemiyle regresyon ifadesinin bulunması skorların 1.0'dan büyük olarak hesaplanmasına yol açabilir. Bu yüzden, Tobit regresyon modelinin kullanılması daha uygundur. Bununla ilgili olarak McCarty ve Yaisawarng [95] incelenebilir. Bu metodla ilgili olarak ileri sürülen eleştirilerin başında aylak değişkenlerin dikkate alınmıyor olması gelmektedir. Bu sakıncayı ortadan kaldırmak üzere dört aşamalı bir yaklaşım Fried, Schmidt ve Yaisawarng [78] tarafından önerilmiştir.

Dışsal değişkenlerin doğrusal programlama modeline doğrudan alınmasını sağlayan yaklaşımlar da bulunmaktadır. Bununla ilgili olarak Bessent ve Bessent [25] ve Ferrier ve Lovell [75] incelenebilir. Konuyla ilgili metotların bir gruplamasını veren Coelli, Rao ve Battese'nin [52] çalışmasına paralel olarak ilgili iki metot, ileride daha ayrıntılı incelemesi yapılmak üzere, aşağıda kısaca sunulmuştur.

Metot I:

Eğer dışsal değişkenlerin etkinlik üzerinde yarattıkları etkinin yönü bilinmiyorsa, doğrusal programlama modelinde bu değişkenlere ilişkin eşitlik ifadeleri kurulur. Dışsal değişkenlerin sayıları c olmak üzere, karar birimi k için dışsal değişkenlerin değeri \vec{d}_k ve tüm karar birimleri için kontrol edilemeyen değişken değerleri D_{lk} , $l = 1, \dots, c$, $k = 1, \dots, N$ ile gösterilecektir. Verilen notasyon yardımıyla e_I modeli şöyle yazılır:

$$\begin{aligned}
& \min \theta_k \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} Y_{rj} \geq Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \\
& \theta_k X_{ik} - \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} X_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
& D_{lk} - \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} D_{lj} = 0 \quad l = 1, \dots, c \\
& \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} = 1
\end{aligned}$$

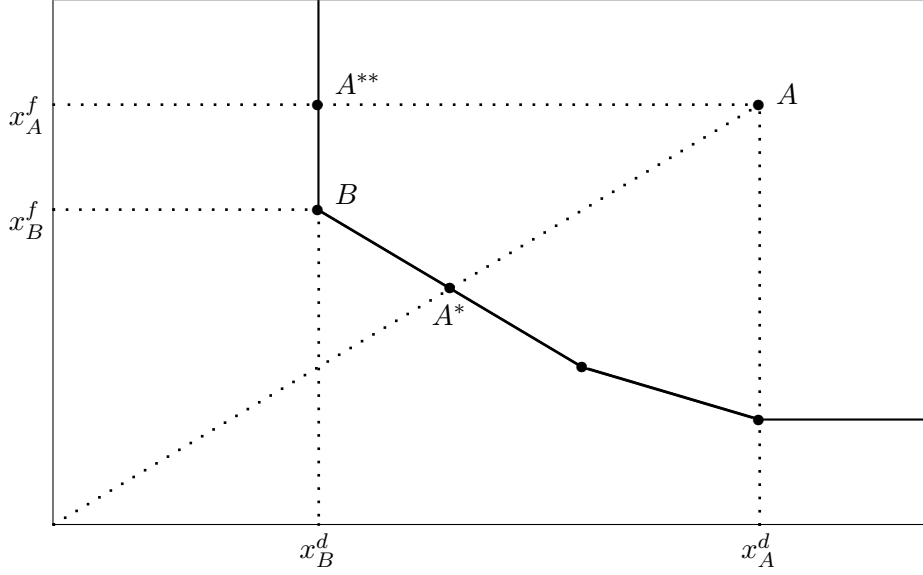
Bu model yardımıyla her karar birimi sadece *aynı* çevreye sahip ve etkin sınır üzerinde bulunan bir hipotetik karar birimiyle kıyaslanacaktır. Kıyaslama sürecinde tanımlanacak olan hipotetik karar birimi, $\sum_{j=1}^N \lambda_{jk} D_{lj}$ ifadesiyle elde edilen bir doğrusal kombinasyondur. Bu doğrusal kombinasyona esas olan karar birimleri arasında çevresi görel olarak daha cazip olan ve olmayanlar bulunacaktır. Ancak tanımlanan hipotetik karar biriminin çevresi analiz edilen karar biriminin çevresi ile aynıdır.

Metot II:

Kontrol edilmesi mümkün olmayan (non-discretionary) dışsal değişkenlerin bulunduğu etkinlik analizinde, kıyaslama sürecinde incelenen karar birimlerinin dışsal değişkenler bakımından daha iyi durumda olanlara referans verilerek değerlendirilmesi istenmiyorsa, o zaman model şu şekilde değiştirilir:

$$\begin{aligned}
& \min \theta_k \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} Y_{rj} \geq Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \\
& \theta_k X_{ik} - \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} X_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
& D_{lk} - \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} D_{lj} \geq 0 \quad l = 1, \dots, c \\
& \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} = 1
\end{aligned}$$

Yukarıda açıklanmış olan iki metodun taşıdığı sakıncalar ortaya konduğunda iki temel husus ön plana çıkmaktadır. Bunlardan ilki, dışsal değişkenlerin sürekli değişkenler olması gereğidir. Diğer bir deyişle *kategorik değişkenlerin* kullanılması mümkün değildir. Kategorik değişkenlerin modellenmesi Banker ve Morey [17] tarafından önerilen yaklaşımla gerçekleştirilir. Eğer kategorik değişkenler kontrol edilemeyen türde ise doğrusal programlama yaklaşımı yeterli olurken, kontrol edilebilen kategorik değişkenlerin bulunması halinde karışık tamsayı programlama (mixed integer programming) modellerine gereksinim duyulmaktadır. Buna ilişkin ayrıntılı açıklama §6.4 kapsamında verilmiştir. Metot II'nin taşıdığı bir başka sakınca ise dışsal değişkenlerin etkinliği nasıl etkiledikleri konusunda *a priori* bir değerlendirme yapılması ve buna göre model kurulması gereğidir. Eğer dışsal değişken değerlerindeki artışın negatif etkisinin olacağı öngörülüyorsa değerlerin tersinin alınarak D_{jk} matrisinin oluşturulması gerekmektedir. Alternatif olarak, değişkenin çıktı olarak tanımlanması da mümkündür.

Şekil 6.1: Kontrol Edilemeyen Girdi x^f

6.1 Dışsal Olarak Sabitlenmiş Girdi

Bu kısımda Banker ve Morey tarafından dışsal olarak sabitlenmiş girdi veya çıktılarının bulunması halinde etkinlik analizi yapmaya yönelik olarak geliştirilen modelleme yaklaşımı verilmiştir. Bu bağlamda, ilk olarak, tek çıktı-iki girdi durumu için girdiye yönelik olarak model kurulmuştur. Ardından, çok girdi-çok çıktı durumu için genel model verilmiştir. Ölçek ve teknik etkinlik ile ilgili incelemelerin ardından çıktıya yönelik analiz konu edilmiştir.

Konu edilen modelde tek çıktı y_j , kontrol edilebilen (discretionary) girdi x_j^d ve sabit (fixed) olan girdi x_j^f ile gösterilmiştir. Örnek bir grafik Şekil 6.1 ile gösterilmiştir. x^f girdisinin kontrol edilemediği göz önüne

alınmazsa, karar birimi A için e_I modeli aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned}
& \min \quad \theta_A \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{j=1}^N \lambda_{jA} y_j - s_A^- = y_A \\
& \sum_{j=1}^N x_j^d \lambda_{jA} + s_A^{d+} = \theta_A x_A^d \\
& \sum_{j=1}^N x_j^f \lambda_{jA} + s_A^{f+} = \theta_A x_A^f \\
& \sum_{j=1}^N \lambda_{jA} = 1 \\
& \lambda_{jA} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N; \quad s_A^-, s_A^{d+}, s_A^{f+} \geq 0
\end{aligned}$$

Karar birimi A 'nın, tek çıktı olan y 'yi azaltmadan, girdi miktarlarında sağlayabileceği azalma $\xi_A^{d,f}$ ile gösterilecektir. $\xi_A^{d,f}$ 'nin değeri

$$\xi_A^d = (1 - \theta_A^*) x_A^d + s_A^{d+}$$

ve

$$\xi_A^f = (1 - \theta_A^*) x_A^f + s_A^{f+}$$

ifadeleriyle bulunabilir. Ancak, x_A^f 'nin dışsal olarak sabitlendiği ve değiştirilemeyeceği düşünülürse, problem x_A^d 'nin ne miktarda azaltılacağına belirlenmesi haline dönüşür. Şekil 6.1 incelenirse, karar birimi A için rol modelin artık A^* olamayacağı açıktır. Çünkü, x_A^f girdisinin $x_{A^*}^f$ seviyesine indirilmesi mümkün değildir. Bunun yerine, x_A^f miktarı değiştirilmeden, x_A^d girdisi azaltılarak A^{**} noktasına doğru yaklaşılmalıdır. Bu çerçevede, A 'nın A^* yerine A^{**} ile kıyaslanması gerekir. Öte taraftan, A^{**} etkin sınır üzerinde bulunmasına rağmen etkin bir karar birimi olması gerekmediği unutulmamalıdır. Bunun sebebi, etkinlik skoru olarak 1.0 değerine ulaşılsa da, aylak değişken değerlerinin 0.0 olma şartının sağlanamayacağı durumların bulunabilmesidir. Grafikten açıkça görüldüğü gibi, A^{**} 'in $x_{A^{**}}^f$ bileşeninde $(x_{A^{**}}^f - x_B^f)$ kadar bir aylak bulunmaktadır.

Bu bağlamda, etkinlik modelinde gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$\begin{aligned}
& \min \quad \varphi_A \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{j=1}^N \lambda_{jA} y_j - s_A^- = y_A \\
& \sum_{j=1}^N \lambda_{jA} x_j^d + s_A^{d+} = \varphi_A x_A^d \\
& \sum_{j=1}^N \lambda_{jA} x_j^f + s_A^{f+} = x_A^f \\
& \sum_{j=1}^N \lambda_{jA} = 1 \\
& \lambda_{jA} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N; \quad s_A^-, s_A^{d+}, s_A^{f+} \geq 0
\end{aligned} \tag{6.3}$$

(6.3) ifadesi, A için oluşturulan referans noktanın x_A^f girdisinden daha fazla kullanamayacağını, fakat gerekirse daha az kullanabileceğini göstermektedir. Böylece, x_A^d 'nin aksine, x_A^f 'den $(1 - \varphi_A)x_A^f$ kadar bir azalma beklenmemektedir. Ayrıca, grafikte verilen durum için çözüm bulunması halinde aylak değişkenin alacağı değer $(x_{A^{**}}^f - x_B^f)$ olacaktır.

Yukarıda verilen zarflama modeline eş kesirli programlama modeli şöyle yazılır:

$$\begin{aligned}
& \max \\
& \frac{u y_A - v_f x_A^f - u_0}{v^d x_A^d} \\
& \text{s.t.} \\
& \frac{u y_j - v_f x_j^f - u_0}{v^d x_j^d} \leq 1 \quad j = 1, \dots, N \\
& u, v^{d,f} \geq 0, \quad u_0 \text{ urs}
\end{aligned}$$

Böylece, biri kontrol edilen ve diğeri kontrol edilemeyen olmak üzere iki girdi ve tek çıktı durumuna ilişkin model oluşturulmuştur.

θ ve φ skorları karşılaştırıldığında, θ 'nin daima φ 'dan büyük olduğu görülür. Çünkü, minimizasyon tipinde bir modelde, *ceteris paribus*, $(.) \leq \theta_A x_A^f$ ve $(.) \leq x_A^f$ kısıtları altında amaç fonksiyonunun optimum değeri için $\theta_k^* \geq \varphi_k^*$ yazılabilir. Ayrıca, grafikten de,

$$\theta_A^* = \frac{\overline{OA^*}}{OA} = \frac{x_{A^*}^d}{x_A^d} \geq \varphi_A^* = \frac{x_B^d}{x_A^d} \quad (6.4)$$

yazılır. Bu durum sadece tek çıktı ve iki girdi durumuna özel değildir. Nitekim, çok girdi-çok çıktı durumu için genelleştirme, bir önerme yardımıyla, Banker ve Morey tarafından yapılmıştır.

Bu noktada çok girdi-çok çıktı durumuna ilişkin genel modelin verilmesi uygun olacaktır. I_D kontrol edilebilir ve I_F dışsal olarak sabitlenmiş girdi faktörlerinin setini göstermek ve $I_D \cap I_F = \emptyset$ olmak üzere, genel model

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi_k \\ \text{s.t.} \quad & \\ & \sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} \geq Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} \leq \theta_k X_{ik} \quad i \in I_D \\ & \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} \leq X_{ik} \quad i \in I_F \\ & \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} = 1 \\ & \lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

olarak yazılır.

Buraya kadar yapılan açıklamalarda ölçeğe göre değişken getiri varsayımı yapılmış ve *BCC* modeli kullanılmıştır. Daha önce yapılan açıklamalardan hareketle, *CCR* modeli $\sum_{j=1}^N \lambda_{jk} = 1$ kısıtı *BCC* modelinden

çıkarılarak elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \min \quad \varphi_k \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} - S_{rk}^- = Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \\
& \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} + S_{ik}^+ = \theta_k X_{ik} \quad i \in I_D \\
& \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} + S_{ik}^+ = \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} X_{ik} \quad i \in I_F \\
& \lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N
\end{aligned}$$

Böylece, eğer k karar birimi kontrol edilebilen i girdisi miktarını

$$X_{ik}^* = \frac{\varphi_k^* X_{ik} - S_{ik}^{+*}}{\sum_{j=1}^N \lambda_{jk}^*} \quad i \in I_D \quad (6.5)$$

düzeyine indirirse, ve r çıktısı miktarını

$$Y_{rk}^* = \frac{Y_{rk} + S_{rk}^{-*}}{\sum_{j=1}^N \lambda_{rk}^*} \quad r = 1, \dots, s \quad (6.6)$$

düzeyine yükseltirse toplam etkinlik skoru 1.0 olacak ve bir *MPSS* tanımlayacaktır.

Dışsal olarak sabitlenmiş değişkenlerin bulunduğu duruma karşılık gelen *CCR* modelinin kesirli programlama formunda ifadesi de müm-

kündür:

$$\begin{aligned}
& \max \\
& \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rk}}{\sum_{i \in I_D} v_{ik} X_{ik}} \\
& \text{s. t.} \\
& \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} Y_{rj} - \sum_{i \in I_F} v_{ik} (X_{ij} - X_{ik})}{\sum_{i \in I_D} v_{ik} X_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, N \\
& u_{rk}, v_{ik} \geq 0
\end{aligned}$$

Daha önce ölçeğe göre getiri ile ilgili olarak yapılmış olan yorumların tümü, kontrol edilemeyen değişkenlerin bulunması halinde de geçerliliğini korumaktadır. Bununla ilgili ayrıntılı yorumlar için Banker ve Morey incelenmelidir.

Girdi faktörlerinden bazılarının kontrol edilemediği durumda etkinlik analizinin çıktıya yönelik olarak yapılmasıyla ilgili olarak yine Banker ve Morey'in çalışmasına başvurulabilir.

6.2 Dışsal Olarak Sabitlenmiş Çıktı

Banker ve Morey'in [16] çalışmasından son olarak, kontrol edilemeyen değişkenlerin çıktı faktörleri arasında bulunması halinde etkinlik analizi çıktıya yönelik olarak gerçekleştirilmesi konusu açıklanacaktır. Bu süreçte girdi faktörlerinin mevcut düzeyleri değiştirilmeden kontrol edilebilir çıktı düzeyleri yükseltilmeye çalışılmaktadır. İlgili model O_D kontrol edilebilir ve O_F dışsal olarak sabitlenmiş çıktı faktörlerinin setini göster-

mek ve $O_D \cap O_F = \emptyset$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \max \quad \zeta_k \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} - S_{rk}^- = \zeta_k Y_{rk} \quad r \in O_D \\
& \sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} - S_{rk}^- = Y_{rk} \quad r \in O_F \\
& \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} + S_{ik}^+ = X_{ik} \quad i = 1, \dots, m \\
& \lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Bu modelin kesirli programlama formunda ifadesi ise:

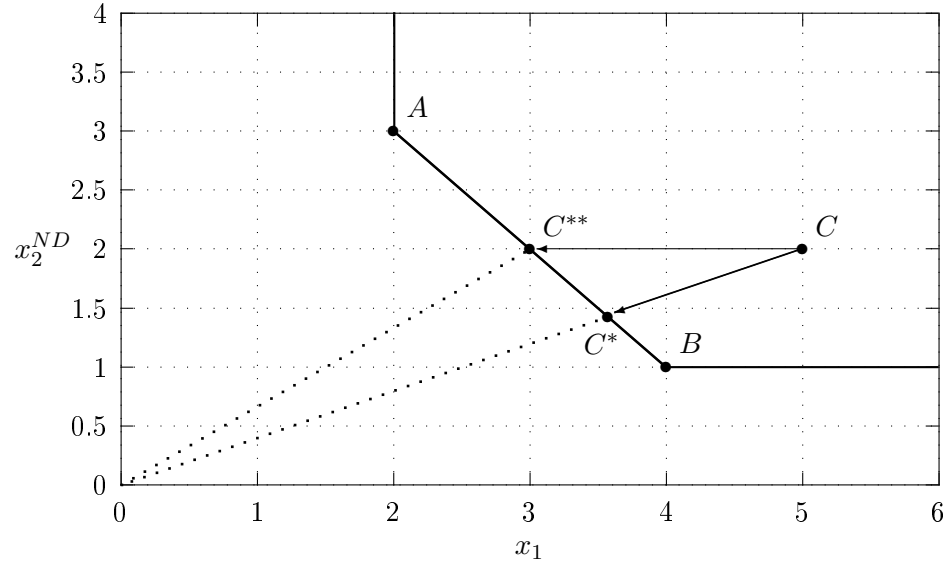
$$\begin{aligned}
& \min \\
& \frac{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ik} - \sum_{r \in O_F} u_{rk} Y_{rk} - u_0}{\sum_{r \in O_D} u_{rk} Y_{rk}} \\
& \text{s.t.} \\
& \frac{\sum_{i=1}^m v_{ik} X_{ij} - \sum_{r \in O_F} u_{rk} Y_{rj} - u_0}{\sum_{r \in O_D} u_{rk} Y_{rj}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, N \\
& u_{rk}, v_{ik} \geq 0
\end{aligned}$$

6.3 Örnek: Dışsal Olarak Sabitlenmiş Girdi/Çıktı

Kontrol edilemeyen dışsal değişkenler ile ilgili bir sayısal örnek aşağıda verilmiştir. İki girdi ve tek çıktının bulunduğu bir üretim sürecinde çıktılardan biri, x_1 , kontrol edilebilir bir faktörken, diğeri, x_2^{ND} , kontrol edilememektedir. Ölçeğe göre sabit getiri varsayımı altında bulunan etkinlik skorları tabloda en son sütunda verilmiştir. τ_{ts} sütununda yer alan

DMU_k	x_1	x_2^{ND}	y	τ_{ts}	τ_{ts}^{ND}
A	2	3	1	1.000	1.000
B	4	1	1	1.000	1.000
C	5	2	1	0.714	0.600

caption Kontrol Edilemeyen Değişkenler Örneği



Şekil 6.2: Kontrol Edilemeyen Değişken Örneği

etkinlik skorları ise, CRS ve girdi faktörlerinin her ikisinin de kontrol edilebildiği varsayımı altında bulunmuştur. Şekil 6.2 üzerinden görüleceği gibi karar birimleri A ve B toplam etkindir. Etkin olmayan C 'nin her iki girdi faktörünün de kontrol edilebilmesi halinde rol modeli olarak C^* 'ın tanımlandığı görülmektedir. Ancak, örnekte x_2^{ND} girdi faktörünün kontrol edilemediği belirtilmiştir. Bu bağlamda C etkinliği yakalayabilmek için yatayda hareket ederek, x_1 girdisini azaltarak, etkin sınıra ulaşmak zorundadır. Bu nokta grafikte C^{**} ile gösterilmiştir. $|OC^{**}|/|OC| = 0.6$ olduğu görülmektedir. Bu değer tabloda τ_{ts}^{ND} sütununda verilen değer ile aynıdır.

6.4 Kategorik Değişkenler

Önceki kısımda ele alınan kontrol edilemeyen dışsal değişkenlerin sabitlendiği varsayılmıştır. Bu kısımda, öncekinden farklı olarak, kontrol edilemeyen değişkenlerin kategorik olması durumu incelenecektir. Kategorik değişkenlerin etkinlik analiz sürecinde yer almaları uygulama açısından son derece gereklidir. Örneğin, bazı banka şubeleri ATM hizmeti sunarken diğerleri sunmamaktadır. Etkinlik analizinde bu gibi durumları içerebilmek için Banker ve Morey [17] tarafından önerilen tamsayı programlama modeli bu kısımda ele alınmıştır.

Toplam girdi sayısı -kontrol edilen ve edilemeyenler birlikte- m olsun. m tane girdinin ilk m' tanesi kontrol edilebilir ve kalanları ise, $i = m' + 1, \dots, m$, kontrol edilemeyen değişkenleri gösterecektir. Ayrıca, sadece $i = m$ değişkeninin kontrol edilemeyen bir kategorik değişken olduğu varsayalım. Kategorik değişken, sürekli değişkenin aksine, sonlu sayıda değer alabilmektedir. Bu yüzden, DEA modellerinin esas aldığı konvekslik postulatı kategorik değişkenler için geçerli değildir. Etkinlik analizlerinde, üretim imkanları kümesini tanımlayan her hiperdüzlem üzerinde marjinal üretkenliğin sabit olduğu temel varsayımlar arasındadır. Kategorik değişkenler için bu varsayım da geçerli değildir. Dolayısıyla konvekslik postulatı kullanılmadan üretim imkanları kümesinin tanımlanması gerekmektedir. Banker ve Morey'nin [17] çalışması paralelinde,

$$\Omega = \left\{ (\vec{x}, \vec{y}), \vec{x} = (X_1, X_2, \dots, X_m), \vec{y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_s) \mid \right. \\ \left. \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0; Y_r \leq \sum_{j=1}^N \lambda_j Y_{rj}, r = 1, \dots, s; \right. \\ \left. X_i \geq \sum_{j=1}^N \lambda_j X_{ij}, i = 1, \dots, m-1; X_m \geq X_{ml}, \forall l, \lambda_l > 0 \right\} \quad (6.7)$$

DEA modellerinde yer alan

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j X_{mj} \leq X_{mk}$$

kısıtı, konveks kombinasyonda $\lambda_l > 0$ olan tüm karar birimleri l için

$$\lambda_l > 0 \Rightarrow X_{ml} \leq X_{mk} \quad (6.9)$$

kısıtı ile değiştirilmelidir. Böylece, konveks kombinasyonda yer alan karar birimlerinin kontrol edilemeyen kategorik değişken değerlerinin, karar birimi k 'nın kategorik değişkeninin değeri ile aynı veya onun altında olması gerektiği ifade edilmiş olmaktadır. (6.9) ifadesinin doğrusal programlama modeli içinde yer alabilecek forma dönüştürülmesi için, kategorik değişken X_m 'in alabileceği değer sayısı $p + 1$ ile gösterilmek üzere, p tane yeni $d_{mk}^{(\alpha)}$ değişkeni tanımlanacaktır. Yeni değişkenlerin işlevi bir örnek üzerinde açıklanacaktır. Bir kategorik değişken için 4 mümkün durum bulunsun: "yok", "az", "orta" ve "çok". Bunlar arasında "çok" ("yok") etkinlik üzerinde en fazla (az) olumlu etkisi olan durum olsun. Tanımlanan 0-1 değişkenler $d_{mk}^{(1)}$, $d_{mk}^{(2)}$ ve $d_{mk}^{(3)}$ 'dir.

- Eğer karar birimi k için kategorik değişkenin değeri "yok" ise $d_{mk}^{(1)} = d_{mk}^{(2)} = d_{mk}^{(3)} = 0$ olacaktır.
- Eğer karar birimi k için kategorik değişkenin değeri "az" ise $d_{mk}^{(1)} = 1$, $d_{mk}^{(2)} = d_{mk}^{(3)} = 0$ olacaktır.
- Eğer karar birimi k için kategorik değişkenin değeri "orta" ise $d_{mk}^{(1)} = d_{mk}^{(2)} = 1$, $d_{mk}^{(3)} = 0$ olacaktır.
- Eğer karar birimi k için kategorik değişkenin değeri "çok" ise $d_{mk}^{(1)} = d_{mk}^{(2)} = d_{mk}^{(3)} = 1$ olacaktır.

Banker ve Morey'in [16] kontrol edilemeyen değişkenlerle ilgili modelinde sözü edilen değişkenlere karşılık gelen

$$\sum_{j=1}^N \lambda_{jk} X_{mj} + S_{mk}^- = X_{mk}$$

kısıt,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} d_{mj}^{(1)} &\leq d_{mk}^{(1)}, \\ \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} d_{mj}^{(2)} &\leq d_{mk}^{(2)}, \\ \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} d_{mj}^{(3)} &\leq d_{mk}^{(3)} \end{aligned}$$

ile değiştirilmelidir. Eğer karar birimi k kategorik değişken açısından en alt düzeyde ("yok") ise, diğer bir deyişle $d_{mk}^{(1)} = d_{mk}^{(2)} = d_{mk}^{(3)} = 0$, o zaman yukarıda verilen ifadelerden

$$\sum_{j=1}^N \lambda_{jk} d_{mk}^{(\alpha)} \leq 0, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

bulunur. Bu yüzden, konveks kombinasyonu oluşturan karar birimleri arasında yer alacak olan karar birimleri l için $\lambda_l^* > 0$ şartı, yani kategorik değişken açısından en alt düzeyde ("yok") olma şartı sağlanmaktadır. Benzer olarak, bu sefer eğer karar birimi k kategorik değişken açısından "az" düzeyinde ise, diğer bir deyişle $d_{mk}^{(1)} = 1$, $d_{mk}^{(2)} = d_{mk}^{(3)} = 0$, o zaman yukarıda verilen ifadelerden

$$\sum_{j=1}^N \lambda_{jk} d_{mj}^{(1)} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} d_{mj}^{(2)} \leq 0, \quad \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} d_{mj}^{(3)} \leq 0$$

elde edilir. Böylece, konveks kombinasyonu oluşturan karar birimleri arasında yer alacak olan karar birimleri l için $\lambda_l^* > 0$ şartı, yani kategorik değişken açısından "yok" veya "az" olma şartı ifade edilir.

Kategorik değişkenlerin kontrol edilebilir olması halinde, Banker ve Morey tarafından önerilen karışık tamsayı programlama modeli kullanılmalıdır. Bu modelin ayrıntısı [17] çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada eksik ve hatalı olan bazı noktalar daha sonra Kamakura [87] tarafından düzeltilmiştir.

Dışsal değişkenler üzerine yazında yer alan çalışmalar arasında bulunan Ray [104], Golany ve Roll [83] ve Ruggiero [109] incelenebilir.

Bölüm 7

Malmquist TFP Endeksi

7.1 Giriş

Önceki bölümlerde tartışılan etkinlik ölçme yaklaşımlarının zaman boyutu bulunmamaktadır. Diğer bir deyişle, analizler herhangi belirli bir an için gerçekleştirilmiştir. Ancak etkinlik değerlendirme sürecinde cevaplanması gereken önemli bir soru, zaman içinde etkinliğin nasıl değişmekte olduğudur. Bu bölümde, bahsedilen soruna cevap vermek üzere *Malmquist Toplam Faktör Verimliliği* (Malmquist Toplam Faktör Produktivitesi) (Total Factor Productivity-TFP) endeksi oluşturma konusu incelenmiştir.

Karar birimlerine ilişkin panel verinin derlenebilmesi halinde toplam faktör verimliliğindeki değişme incelenebilmektedir. Benzer amaca yönelik olarak kullanılan Tornqvist/Fisher endekslerinden farklı olarak, Malmquist TFP endeksinin oluşturulabilmesi için ilgili karar birimlerinin kâr maksimizasyonu veya maliyet minimizasyonu hedefledikleri varsayımına gerek bulunmamaktadır. Bu bağlamda, Tornqvist/Fisher metodu için gerekli olan fiyat verisinin derlenmesi Malmquist metodu için zorunlu değildir. Böylece, özellikle kamu sektörü veya kar amacı gütmeyen organizasyonların performansının ölçümünde zaman boyutunu dikkate alabilecek güçlü bir yöntem olarak değerlendirilmektedir.

Malmquist TFP endeksi bahsedilen avantajlarına ek olarak, endeksi oluşturan iki bileşeni açıkça tanımlayabilmektedir. Bunlar, karar birimlerinin etkin sınıra yaklaşma sürecinin bir değerlendirmesi olan *etkinlik de-*

ğişimi (Efficiency Change) ve etkin sınırın zaman içinde değişimini belirlemeye yönelik olarak oluşturulan *teknik değişim* (Technical Change).

Malmquist TFP endeksi, iki farklı yaklaşımla oluşturulabilmektedir: parametrik ve parametrik olmayan yöntemler. Parametrik olmayan yöntem olarak DEA tabanlı bir yaklaşım kullanılmaktadır. Bu bağlamda sadece parametrik olmayan yaklaşıma değinilmiş ve DEA tekniği ile olan ilişki ortaya konmuştur.

7.2 Uzaklık Fonksiyonu ve Malmquist TFP Endeksi

Malmquist TFP endeksi konusunda yazılmış olan temel referans niteliğindeki iki çalışma Nishimizu ve Page [97] ile Fare, Grosskopf, Norris ve Zhang [67]'ye aittir. Bahsi geçen ilk çalışma, Aigner ve Chu'nun [4] doğrusal programlama tabanlı yaklaşımını kullanarak parametrik üretim sınırının belirlenmesini ve takiben TFP değişimini etkinlik değişimi ve teknik değişim bileşenlerinin toplamı olarak yazılabileceğini göstermiştir. İkinci çalışmada ise Caves, Christensen ve Diewert [31]'ta tanımlandığı şekliyle Malmquist TFP endeksinin ölçümü için DEA tabanlı bir teknik geliştirilmiştir. Ayrıca yine, TFP endeksinin etkinlik değişimi ve teknik değişime karşılık gelen iki bileşenden oluştuğu gösterilmiştir. Bu iki çalışma arasındaki temel fark, [97] parametrik bir yaklaşım kullanırken, [67]'de ileride tanımlanacak olan uzaklık fonksiyonları parametrik olmayan yöntemle belirlenmekte ve buradan Malmquist TFP endeksinin hesaplanmasına geçilmektedir. Bu ve benzer yöntemlerle ilgili olarak daha ayrıntılı inceleme için Grosskopf [85] ve Fare, Grosskopf, Roos'nin [68] literatür taramalarına bakılabilir.

Malmquist toplam faktör verimliliği endeksi iki gözlemin toplam faktör verimliliğindeki değişmeyi ortak bir teknolojiye olan uzaklıkların oranı olarak ölçer. Bu ölçüm için uzaklık fonksiyonu kullanılmaktadır. Malmquist endeksi ile uzaklık fonksiyonları arasındaki ilişki bu noktada doğrudur. Caves ve diğerleri [31] tarafından geliştirilen bu endekse, uzaklık fonksiyonları yardımıyla endeks kurma fikrini ilk ortaya atan Sten Malmquist'in ardından, Malmquist ismi verilmiştir. *Uzaklık fonksiyonu* çok-girdili çok-çıkıtlı üretim teknolojilerini, maliyet minimizasyonu veya kâr maksimizasyonu gibi hedefleri belirtmeden, tanımlamada kullanılır.

maktadır. Girdi uzaklık fonksiyonu, çıktı vektörü verildiğinde, oransal olarak en çok büzülen (contraction) girdi vektörüne bağlı olarak üretim teknolojisini tanımlar. Benzer olarak, çıktı uzaklık fonksiyonu, girdi vektörü verildiğinde, oransal olarak en çok genişleyen (expansion) girdi vektörüne bağlı olarak üretim teknolojisini tanımlar. Bu kısımda sadece çıktı uzaklık fonksiyonu incelenmiştir. Ancak, benzer şekilde, girdi uzaklık fonksiyonları da tanımlanabilir.

Çıktıya göre uzaklık fonksiyonu, \vec{x} ile üretilebilecek mümkün \vec{y} 'lerin kümesi $\Omega(\vec{x})$ ile gösterilmek üzere,

$$d_o(\vec{x}, \vec{y}) = \min\{\delta | (\vec{y}/\delta \in \Omega(\vec{x}))\} \quad (7.1)$$

olarak tanımlanır. Uzaklık fonksiyonu $d_o(\vec{x}, \vec{y})$ 'nin alacağı değerler, y vektörü $\Omega(\vec{x})$ sınırı üzerinde ise 1.0; \vec{y} vektörü $\Omega(\vec{x})$ içindeki teknik etkin olmayan bir noktayı tanımlıyorsa > 1.0 ; ve \vec{y} vektörü $\Omega(\vec{x})$ dışındaki mümkün olmayan bir noktayı tanımlıyorsa < 1.0 'dir.

Fare ve diğerlerini [67] izleyerek, esas alınan s dönemi ve izleyen t dönemi arasındaki çıktıya göre Malmquist TFP değişim endeksi, uzaklık fonksiyonu çerçevesinde,

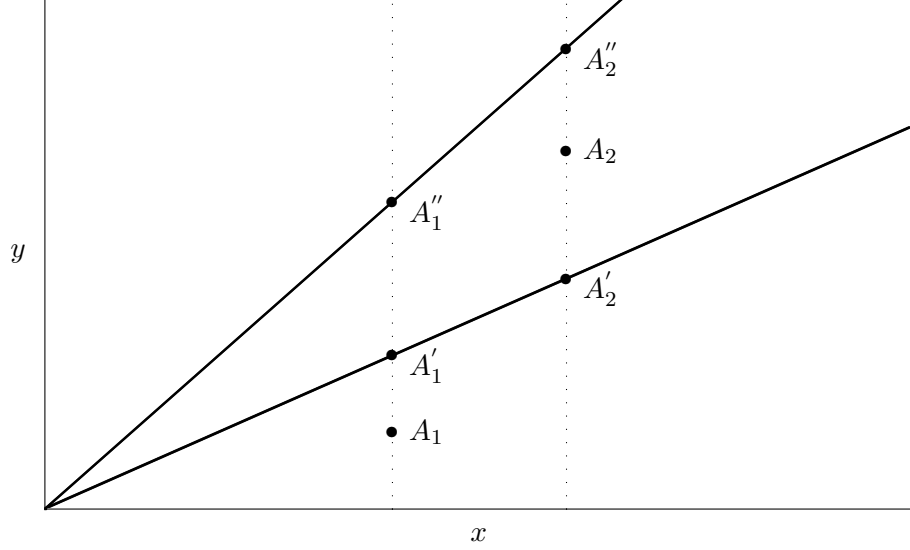
$$m_o(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{x}_t, \vec{y}_t) = \sqrt{\frac{d_o^s(\vec{x}_t, \vec{y}_t)}{d_o^s(\vec{x}_s, \vec{y}_s)} \times \frac{d_o^t(\vec{x}_t, \vec{y}_t)}{d_o^t(\vec{x}_s, \vec{y}_s)}} \quad (7.2)$$

olarak hesaplanır. Bu gösterimde $d_o^s(\vec{x}_t, \vec{y}_t)$, t dönemi gözleminin s dönemi teknolojisinden olan uzaklığını ifade eder. $m(\cdot)$ fonksiyonunun değerinin 1.0'dan büyük olması s döneminden t dönemine TFP'de büyüme olduğunu, 1.0'dan az olması ise aynı dönemler dikkate alındığında TFP'de azalma olduğunu göstermektedir. Yukarıdaki eşitlik aşağıdaki gibi yazılabilir

$$m_o(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{x}_t, \vec{y}_t) = \frac{d_o^t(\vec{x}_t, \vec{y}_t)}{d_o^s(\vec{x}_s, \vec{y}_s)} \sqrt{\frac{d_o^s(\vec{x}_t, \vec{y}_t)}{d_o^t(\vec{x}_t, \vec{y}_t)} \times \frac{d_o^s(\vec{x}_s, \vec{y}_s)}{d_o^t(\vec{x}_s, \vec{y}_s)}} \quad (7.3)$$

Eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim dönem s ve dönem t arasındaki Farrell'in çıktıya yönelik etkinlik değişiminin ölçüsüdür. Karekök içindeki ifade ise teknik değişmeyi ifade eder. Bu ifadeler Şekil (7.1) ile verilen grafik üzerinde açıklanmıştır.

Şekilde *CRS* varsayımı altında tek-girdi tek-çıkıtı durumunda tek bir karar birimi A , incelenmiştir. s döneminde teknoloji l_1 altında karar birimi A 'nın lokasyonu A_1 'dir. t dönemine gelindiğinde, teknoloji l_2 altında



Şekil 7.1: Malmquist TFP Endeksi

A_1 'nin yeni lokasyonu A_2 olarak gözlenir. Bu durumda

$$\text{Etkinlik değişimi} = \frac{y_{A_2}/y_{A_2''}}{y_{A_1}/y_{A_1'}}$$

$$\text{Teknik değişme} = \left[\frac{y_{A_2}/y_{A_2'}}{y_{A_2}/y_{A_2''}} \times \frac{y_{A_1}/y_{A_1'}}{y_{A_1}/y_{A_1''}} \right]^{1/2}$$

Bir ampirik çalışmada ardışık iki dönem için hesaplama yapabilmek için dört uzaklık fonksiyonunun da bulunması gerekmektedir. Bu hesaplama ise matematiksel programlamayla veya ekonometrik tekniklerle gerçekleştirilebilir. Malmquist TFP endeksi ile ilgili olarak kapsamlı bir tarama Fare ve diğerleri [68] tarafından yapılmıştır.

TFP endeksi için kullanılan uzaklık fonksiyonlarının hesaplanmasında günümüzde en çok başvurulan yaklaşım olan, Fare ve diğerlerinin [67] geliştirdiği, matematiksel programlama modelleri çıktıya yönelik

olarak aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
 [d_o^t(\vec{x}_t, \vec{y}_t)]_k^{-1} &= \max \theta_k \\
 &\text{s.t.} \\
 &-\theta_k Y_{rk}^t + \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} Y_{rj}^t \geq 0 \\
 &X_{ik}^t - \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} X_{ij}^t \geq 0 \\
 &\lambda_{jk} \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [d_o^s(\vec{x}_s, \vec{y}_s)]_k^{-1} &= \max \theta_k \\
 &\text{s.t.} \\
 &-\theta_k Y_{rk}^s + \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} Y_{rj}^s \geq 0 \\
 &X_{ik}^s - \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} X_{ij}^s \geq 0 \\
 &\lambda_{jk} \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [d_o^t(\vec{x}_s, \vec{y}_s)]_k^{-1} &= \max \theta_k \\
 &\text{s.t.} \\
 &-\theta_k Y_{rk}^s + \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} Y_{rj}^t \geq 0 \\
 &X_{ik}^s - \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} X_{ij}^t \geq 0 \\
 &\lambda_{jk} \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[d_o^s(\vec{x}_t, \vec{y}_t)]_k^{-1} &= \max \theta_k \\
&\text{s.t.} \\
&-\theta_k Y_{rk}^t + \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} Y_{rj}^s \geq 0 \\
&X_{ik}^t - \sum_{j=1}^N \lambda_{jk} X_{ij}^s \geq 0 \\
&\lambda_{jk} \geq 0
\end{aligned}$$

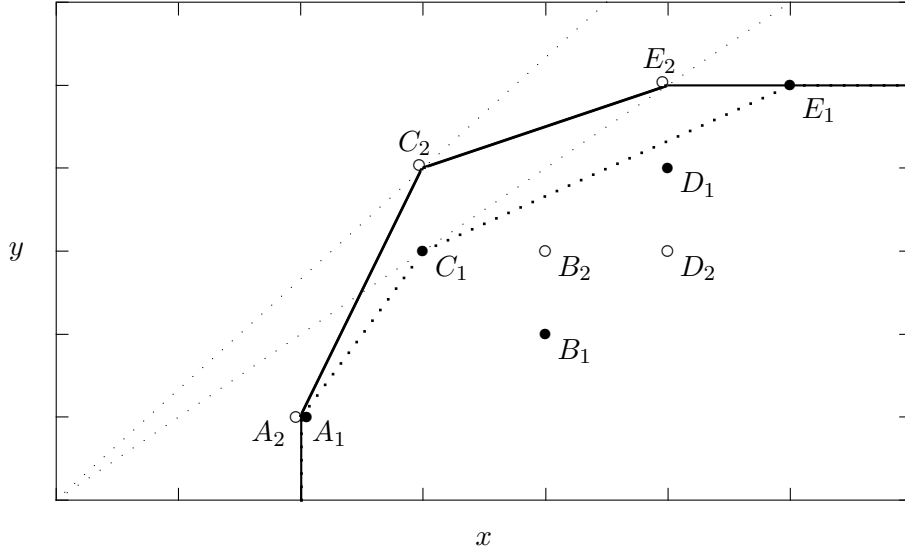
Yukarıda tanımlanan uzaklık değerlerinin tüm dönemler ve gözlemler için hesaplanabilmesi, N gözlem sayısını ve t dönem sayısını göstermek üzere, $n(3t-2)$ tane doğrusal programlama modelinin çözümünü gerektirmektedir.

Ölçümlerle ilgili önemli bir nokta ölçeğe göre getiri varsayımı ile ilgilidir. Ölçeğe göre değişken getiri varsayımı altında Malmquist TFP endeksinin TFP değişimini doğru olarak ölçmediği Tatje ve Lovell [127] tarafından verilen bir tek-girdi/tek-çıkıtı örneğiyle gösterilmiştir. Malmquist TFP endeksi için gerekli olan uzaklık fonksiyonlarını hesaplariken, bu sınıkları ortadan kaldırmak için, ölçeğe göre sabit getiri varsayımında bulunmak gerekir. Ancak, Malmquist TFP endeksine yönelik yazında uzaklık fonksiyonlarının belirlenmesinde ölçeğe göre değişken getirinin de kullanılabileceğini savunanlar bulunmaktadır.

Teknik değişme ve etkinlik değişimine ilişkin Coelli, Rao ve Battese'den [52] alınan nümerik bir örnek aşağıda verilmiştir. Tek-girdi tek-çıkıtı durumunun olduğu örnekte yer alan 5 karar birimine ilişkin birbirini takip eden iki döneme ait veri Tablo 7.1'de görülmektedir. Örneğe ilişkin olarak çizilen Şekil 7.2'de siyah noktalar karar birimlerinin s döneminde ve beyaz noktalar karar birimlerinin izleyen t döneminde buldukları lokasyonları göstermektedir. Grafikten açıkça görüldüğü gibi, s döneminden t dönemine gelindiğinde etkin sınırdaki bir ilerleme olmuştur. Bu durum teknik değişmeye işaret etmektedir. Tabloda verilen veri çerçevesinde 5 karar biriminin her biri için 4 tane uzaklık fonksiyonu hesaplamak için toplam 20 tane, $n(3t-2) = 5(3 \times 2 - 2)$, model çözülmüştür. Elde edilen uzaklık fonksiyon değerleri Tablo 7.2-7.3'te verilmiştir.

DMU_k	Dönem 1		Dönem 2	
	x	y	x	y
A	2	1	2	1
B	4	2	4	3
C	3	3	3	4
D	5	4	5	3
E	6	5	5	5

Tablo 7.1: Malmquist TFP Endeksi Örneği



Şekil 7.2: Malmquist TFP Endeksi Örneği

DMU_k	$[d_o^s(\vec{x}_s, \vec{y}_s)]^{-1}$	$[d_o^t(\vec{x}_t, \vec{y}_t)]^{-1}$	$[d_o^s(\vec{x}_t, \vec{y}_t)]^{-1}$	$[d_o^t(\vec{x}_s, \vec{y}_s)]^{-1}$
<i>A</i>	2.000	2.666	2.000	2.666
<i>B</i>	2.000	1.778	1.333	2.666
<i>C</i>	1.000	1.000	0.750	1.333
<i>D</i>	1.250	2.222	1.666	1.666
<i>E</i>	1.200	1.333	1.000	1.600

Tablo 7.2: Uzaklık Fonksiyon Değerleri

DMU_k	Etkinlik Değişimi	Teknik Değişme
<i>A</i>	0.750	1.333
<i>B</i>	1.125	1.333
<i>C</i>	1.000	1.333
<i>D</i>	0.562	1.333
<i>E</i>	0.900	1.333

Tablo 7.3: Etkinlik ve Teknik Değişme

Bölüm 8

Otel Endüstrisinde DEA Uygulaması

Bu bölümde Tarım, Dener ve Tarım tarafından Akdeniz bölgesindeki 4 ve 5 yıldızlı otellerin etkinliklerinin *DEA* tekniğiyle ölçülmesine yönelik olarak gerçekleştirilmiş olan bir çalışma verilmiştir¹. Bu çalışmanın amacı, otel işletmelerinin göreceli etkinlik ölçümünün Veri Zarflama Analizi (*DEA*) yardımıyla gerçekleştirilmesi ve turizm sektöründe performans ölçüm yaklaşımı olarak *DEA* tekniğinin uygulanabilirliğinin araştırılmasıdır. Bu çerçevede orjinal *DEA-CCR* modeli, çıktı faktör değerlerine üst sınır kısıtı getirilerek, göreceli etkinlik analizinde kullanılmıştır. Çalışma, Antalya yöresindeki 4 ve 5 yıldızlı otellerle sınırlı tutulmuştur. *DEA* uygulaması sonucunda bulunan etkinlik skorları, 4 yıldızlı otellerin, 5 yıldızlı otellere kıyasla çok daha etkin olduğunu göstermiştir.

8.1 Giriş

Etkinlik ve verimlilik, modern işletme yönetim anlayışlarının temelini oluşturan kavramların başında gelmektedir. Bu kavramların taşıdıkları öneme rağmen, yönetim sürecinin değerlendirilmesine yönelik çeşitli

¹Ş. Tarım, H. I. Dener, A. Tarım tarafından hazırlanan "Otel Endüstrisinde Performans Ölçümü: Çıktı Faktör Kısıtlı DEA Uygulaması," çalışması INFORMS-TelAviv, Ağustos 1998 Kongresi ve 7. Ulusal İşletmecilik Kongresi, Kızılcahamam, Kasım 2000'de sunulmuştur.

problem alanları göz önüne getirildiğinde, çoğu kez standart hale gelmiş güvenli ve geçerli ölçüm tekniklerinin bulunmayışının, performans ölçümlerinin gerçekleştirilmesini güçleştirdiği görülmektedir. Hele üretim fonksiyonunun hizmet kalitesi ve müşteri memnuniyeti gibi ölçümü zor faktörleri içerdiği hizmet sektöründe performans ölçümü, imalat sektörüne kıyasla, çok daha güçtür. McLaughlin ve Coffey [96] hizmet sektöründe verimlilik ölçüm tekniklerini inceledikleri çalışmalarında, standart yaklaşımların mevcut olmadığını vurgulamakta ve yeni yaklaşımlardan biri olarak Veri Zarflama Analizi (Data Envelopment Analysis-*DEA*) tekniğine yer vermektedirler. *DEA* tekniğinin hizmet sektöründe kullanımıyla ilgili olarak Sherman [124] incelenebilir.

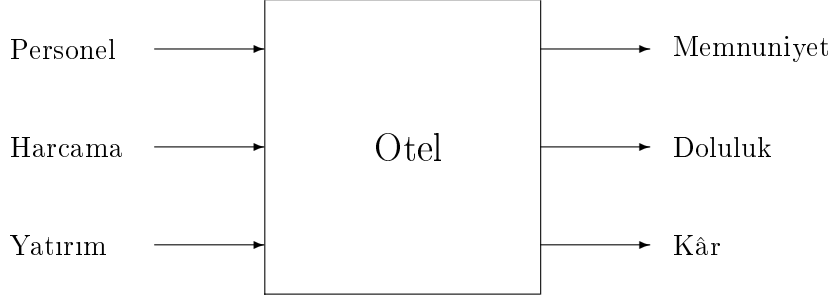
Özellikle, hizmet sektörü içinde önemli bir yer tutan otel işletmeleri için verimlilik ölçüm yaklaşımlarının gerekliliği ve önemi *HCTC*² ve *NEDC*'nin³ raporları tarafından açıkca ortaya konmuştur. Bu bağlamda çalışmanın temel amacı, otel işletmelerinin görece etkinlik ölçümünün *DEA* tekniği yardımıyla gerçekleştirilmesi ve turizm sektöründe performans ölçüm yaklaşımı olarak *DEA* tekniğinin uygulanabilirliğinin araştırılmasıdır. Bu tekniğin otel endüstrisinde ilk uygulaması Parkan [101] tarafından yapılmıştır. Parkan, tek bir otelin birbirini izleyen dönemlerdeki performansını kendi geliştirmiş olduğu *OCRA* (**O**perational **C**ompetitiveness **R**atings) tekniğiyle ölçmüş ve sonuçları, aralarında *DEA*'inde bulunduğu diğer bazı tekniklerden elde edilen sonuçlarla karşılaştırmıştır.

Bu çalışmada, 1998 yılında Antalya yöresinde faaliyet gösteren ve analizde kullanılacak türde verilerine ulaşılabilen tüm 4 ve 5 yıldızlı otellerin *DEA* tekniği yardımıyla görece etkinlikleri ölçülmüştür. Bu amaca yönelik olarak, aşağıda içeriği açıklanacak olan standart *DEA-CCR* modeli, çıktı faktörleri üzerinde üst sınırlar bulunacak şekilde değiştirilerek kullanılmıştır.

Aşağıda §8.2'de, çalışmada kullanılacak olan otel etkinlik modeli tanımlanmıştır. İlgili verilerin özellikleri, §8.3'te sunulmuştur. §8.4'te performans ölçüm uygulaması, sonuçları ve değerlendirmesi verilmiştir. Çalışma, genel değerlendirme ve sonuçları içeren §8.5'le son bulmaktadır.

²Meeting Competence Needs in the Hotel and Catering Industry: Now and in the Future, HCTC Research Report, September 1992

³Costs and Manpower Productivity in UK Hotels, National Economic Development Council (NEDC), 1992



Şekil 8.1: Etkinlik Analizi için Otel Modeli

8.2 Etkinlik Analizi için Otel Modeli

Bu çalışmada oteller, yapılan yatırım, yaptığı harcamalar ve istihdam ettiği personelle kâr elde etmeye çalışan, yüksek doluluk oranı hedefleyen ve müşteri memnuniyetini artırmak isteyen bir üretim birimi olarak tanımlanmıştır. Bu tanım çerçevesinde oteller girdi faktörleri olan (i) yatırım, (ii) harcama ve (iii) personeli kullanarak, çıktı faktörleri olan, (iv) müşteri memnuniyeti, (v) doluluk ve (vi) kâr üreten karar birimleridir. Bu süreç Şekil 8.1’de şematize edilmiştir. Etkinlik modeline dahil edilen girdi/çıktı faktörlerinin tanımları ve modele alınma gerekçeleri aşağıda verilmiştir:

- (i) *Otel yatırım maliyeti*, X_1 : Bir otelin en önemli gider unsuru, işletme öncesi aşamada yapılan yatırım harcamasıdır. Bu kalem en büyük maliyet unsuru olmakla beraber, bir otelin var olabilmesi için gerekli giderdir ve dolayısıyla işletme aşamasında başlayacak olan üretim sürecinin vazgeçilmez girdisidir. Yatırımcının daha yüksek yatırım maliyetlerine katlanmasındaki sebepler, bu bağlamda daha yüksek kâr, talep artışı ve dolayısıyla yüksek doluluk oranı ve müşteri memnuniyetinin sağlanması beklentisidir. Sonuç olarak yatırım maliyetinin girdi faktörü olarak alınması model çerçevesinde tutarlıdır.
- (ii) *Otelde çalışan personel sayısı*, X_2 : Otel endüstrisi emek-yoğun çalışmaktadır. Burada istihdam edilen personele yapılan harcamalar,

önemli bir maliyet kalemini oluşturmaktadır. Personelin maaş miktarları hakkında güvenilir bilgi elde etmek çok zor olduğundan ve bu harcamaların otellerin gizli bilgisi olduğu görüşmeler esnasında açıkça dile getirildiğinden, X_2 parasal olarak ifade edilememiştir. Ancak, *DEA* ile çözüm elde edebilme yaklaşımının avantajlarından biri, (örneğin: \$, kişi sayısı, büyüme oranı gibi) çeşitli ölçü birimleriyle elde edilmiş olan verilerin, birimler arası doğrudan dönüştürmeler gerektirmeden kullanılabilmesidir. Dolayısıyla, buradaki personel harcamaları girdisi personel sayısı ile ikame edilmiştir. Diğer taraftan, ilk yatırım girdisinin bir sabit sermaye stoğu göstergesi olduğu düşünülürse, diğer bir üretim faktörü olan personel sayısı büyüklüğünün de içerilmiş bulunmasının daha uygun olacağı kolayca anlaşılır.

- (iii) *Otelin dönemsel işletmecilik giderleri, X_3* : Bu giderler, personel harcamaları hariç, yiyecek-içecek, telefon, amortisman, sigorta, bakım onarım ve genel giderlerden oluşmaktadır. Otelin işletilmesine başlandıktan sonra, sözkonusu işletmecilik giderleri meydana gelecektir. Bu bağlamda dönemsel işletmecilik giderleri, diğer bir girdi unsuru olarak alınmıştır. Personel sayısı başlı başına bir girdi unsuru olarak ele alındığından, ona bağımlı olarak değişecek olan personel giderleri, işletmecilik giderleri içerisine dahil edilmemiştir.
- (iv) *Otelde bir kereden fazla konaklayan müşteri oranı, Y_1* : Otelde bir kereden fazla konaklayan müşteri oranı, dolaylı olarak müşteri tatmininin bir ölçütü olarak alınmıştır. Zaten, bu çerçevede daha başka bir sorgulama yaklaşımıyla, otel yöneticisinden, müşteri tatmini ile ilgili objektif bilgi elde etmek mümkün değildir. Dolayısıyla, otellerde bir kereden fazla konaklayan müşteri oranından hareket edilerek, müşteri tatmini hakkında ölçülebilir bir izlenim edinilmeye çalışılmıştır. Bu yaklaşım, ilgili literatürde de kullanılmaktadır. Çünkü bir pazarlama kanısına göre:

"... en yüksek müşteri tatmini, en düşük müşteri devir oranı ile ifade edilir. Tatmin olmuş müşterilerin ürünlerinize ve sunduğunuz hizmetlere duydukları güven, zamanla artarak devam eder ve böylece onlar sadık müşterileriniz haline gelirler..."^a

^aE. Nauman ve K. Giel, *Customer Satisfaction Measurement and Management: Using the Voice of the Customer*, Thomson Executive Press, Ohio, 1995.

Aynı bağlamda otel müşterisi, memnun kaldığı oteli yeniden tercih etmekte ve hatta onun sürekli müşterisi haline gelmektedir. Böylece, müşteri tatmin oranına bir kereden fazla konaklayan müşteri oranı ile ulaşılmaya çalışılması uygun bulunmuştur.

- (v) *Otel doluluk oranı, Y_2* : Bir otel işletmesi, temel olarak müşterisinin konaklama ihtiyacını giderir; yani oda hizmeti sunar. Dolayısıyla bir otomobil fabrikasının çıktılarında birinin ürettiği otomobil sayısı olması gibi, bir otel işletmesinin çıktılarında biri de sattığı oda sayısı ve bunun ölçüsü olan oda doluluk oranıdır.
- (vi) *Otelin dönem net kârı, Y_3* : Otellerin de, diğer tüm ticari işletmelerde olduğu gibi ana amacı kâr elde etmektir. Bu nedenle bir otelin en önemli çıktısı kâr olduğundan, bu unsur analize dahil edilmiştir.

8.3 Çalışmada Kullanılan Veri

Burada uygulayacağımız etkinlik analizine konu olan otel işletmeleri, Antalya yöresinde faaliyet gösteren otellerle sınırlandırılmıştır. Bunun sebebi, talebin homojen olmasını sağlamaktır. Farklı bölgelerde bulunan otel işletmelerinin aynı çalışma çerçevesinde değerlendirilmeye çalışılması, bu otellere yönelik talebin benzer yapıda olmaması sebebiyle, güvenilir sonuç vermeyecektir. Yapılan incelemeler, Antalya yöresinin -Side, Alanya, Manavgat, Tekirova, Antalya merkez ilçeleri gözönüne alınır-sakendi içinde homojen bir müşteri profiline sahip olduğunu göstermiştir⁴.

Uygulamanın yöresel olarak sınırlandırılmasının yanında, otel işletmeleri arasında var olan sınıf farkı da bir kısıtlayıcı olarak alınmıştır. Seçilen otel işletmelerinin sadece 4 veya 5 yıldızla sahip olan turizm belgeli işletmelerden ibaret olması ve daha az yıldızlı işletmelerin analize dahil edilmemiş bulunmasının nedenleri aşağıda özetlenmiştir:

- 1-3 yıldızlı otel işletmeleri, genelde profesyonel yönetici bulundurmamakta ve çoğunlukla birer aile işletmesi olarak çalıştırılmaktadır. Bu nedenle, yasaların gerektirdiklerinin dışında veri kaydetme alışkanlıkları fazla gelişmemiştir.

⁴Turizm Pazar Araştırması ve Antalya'ya Yönelik Talep Analizi, Turizm ve Tanıtma Bakanlığı, Araştırma ve Değerlendirme Dairesi Başkanlığı, Ankara, 1975

- Uygulama öncesinde kurulan temaslardan anlaşıldığına göre, işletmelerin bu tip bir araştırma için işbirliğine fazla yanaşmadıkları ortaya çıkmıştır.
- Veri sağlanan 1-3 yıldızlı otellerin müşteri profillerinin 4 ve 5 yıldızlılardan farklı olması sebebiyle, göreceli etkinlik ölçümüne dahil edilmeleri istenmeyen bir homojenlik sorunu yaratacaktır.

1997 Nisan-Ekim dönemine ilişkin olarak istenilen sayısal bilgiler, otel yönetimlerinden yüz yüze görüşme yöntemiyle toplanmıştır. Böylece, otel işletmeleri yöneticilerinin çeşitli tereddütlerinden doğan olası sorulara da anında cevap verebilme olanağı sağlanmıştır. Bu yaklaşımın, veri güvenilirliğinin artırılmasına katkıda bulunduğu düşünülmektedir. Ancak yine de, veri toplanmasına yönelik olarak planlanan sürede, Antalya yöresinde 1997'de bulunan 17 adet 5 yıldızlı otelin 10'undan ve, 15 adet 4 yıldızlı otelin 11'inden, yanıt alınabilmiştir. Karar birimi sayısının az oluşunun *DEA* tekniğinin ayrıştırma gücünü azaltacağı bilinmektedir. Ancak, Vasiloglou ve Giokas'ın [136] "karar birimi sayısı girdi ve çıktılar toplamının en az 2 katı olmalıdır" sezgisel kuralı çerçevesinde analiz için yeterli sayıda karar birimi olduğu değerlendirilmiştir.

DEA analizi yoluyla etkinlik ölçümü yapılacak temel verileri oluşturan bu girdi ve çıktılar, Tablo 8.1'de topluca verilmiştir.

Norman ve Stoker [98] tarafından belirtildiği üzere, tüm girdilerin ve çıktı faktörlerinin arasında güçlü bir korelasyon ilişkisi bulunduğunda, çok yüksek ilişki gösteren faktörlerden birisi modelden indirgenebilmektedir. Örneğimizdeki veriler arasında yapılan korelasyon değerlendirmesi sonucu ise Tablo 8.2 ile gösterilmiştir.

Bulunan korelasyon değerlerinin topluca değerlendirilmesi sonucunda, otel etkinlik modelinde yer alması gerektiği düşünülen faktörlerin tümü etkinlik analizine dahil edilmiştir.

8.4 Etkinlik Ölçüm Uygulaması ve Sonuçları

Yapılan analizin ilk aşamasında, verileri toplanmış bulunan 4 ve 5 yıldızlı otellerin, her birinin bir karar birimi olarak ele alındığı durum için, göreceli etkinliklerinin ölçülmesi hedeflenmiştir. Ancak, standart *DEA* modellerin değişikliğe uğramadan kullanılmaları, tanımlanan otel etkinlik

Otel Sınıfı	Otel No	X_1 \$(10^6)	X_2	X_3 \$(10^6)	Y_1	Y_2	Y_3 \$(10^6)
4★	1	12.74	103	0.504	0.35	0.87	0.738
	2	21.48	250	1.169	0.40	0.85	0.667
	3	3.21	50	0.090	0.15	0.85	0.157
	4	2.57	50	0.137	0.10	0.99	0.235
	5	6.43	100	0.298	0.30	0.70	0.314
	6	16.06	160	0.392	0.18	0.92	0.549
	7	3.25	110	0.643	0.25	0.89	1.607
	8	20.00	250	1.169	0.15	0.80	0.392
	9	0.84	80	0.033	0.50	1.00	0.110
	10	22.50	330	1.010	0.08	0.81	2.244
	11	4.69	150	0.599	0.40	0.90	0.086
5★	12	5.57	310	0.684	0.30	0.95	1.725
	13	85.60	394	3.452	0.15	0.72	2.016
	14	29.14	490	1.470	0.10	0.74	0.396
	15	12.33	250	1.569	0.08	0.91	0.033
	16	13.94	290	0.784	0.40	0.79	0.824
	17	80.00	260	1.176	0.20	0.82	1.608
	18	6.43	150	0.860	0.20	0.80	1.373
	19	7.71	180	1.138	0.15	0.80	1.765
	20	13.73	190	0.769	0.05	0.86	0.587
	21	23.16	307	1.330	0.04	0.95	2.247

Tablo 8.1: Etkinlik Analizi Yapılan 21 Otele Ait Veri

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	1.00					
X_2	0.57	1.00				
X_3	0.76	0.73	1.00			
Y_1	-0.23	-0.30	-0.34	1.00		
Y_2	-0.43	-0.41	-0.47	0.13	1.00	
Y_3	0.43	0.43	0.46	-0.28	-0.16	1.00

Tablo 8.2: Girdi-Çıktı Faktörleri Arasındaki Pearson Korelasyon Katsayıları

modeli çerçevesinde mümkün değildir. Çünkü, çıktı faktörleri arasında yer alan müşteri tatmini ve doluluk oranları, üst sınırı 100% olan faktörlerdir. Halbuki *CCR* modelinin mevcut haliyle kullanılması neticesinde, etkin bulunmayan bazı karar birimlerinin etkin olabilmeleri için, bu iki çıktı faktöründen 100%'ün üzerinde üretmeleri gerektiği bulunabilir. Bu sakıncayı ortadan kaldırmak için *CCR* modelinde ek kısıtlara ihtiyaç duyulmuştur. Düal *DEA-CCR* modeline eklenen yeni kısıtlar şöyledir:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j Y_{1j} \leq \pi_1$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j Y_{2j} \leq \pi_2$$

Bir kereden fazla konaklayan müşteri oranına (müşteri tatmin oranı) karşılık gelen kısıtın sağ kenar sabiti π_1 , gözlenen en yüksek değer olan, 0.50 alınmıştır. Doluluk oranı için ise aynı değer $\pi_2 = 1.00$ 'dir. Söz konusu kısıtlar altında, yeniden düzenlenen düal ve primal *DEA-CCR* modelleri sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} & \min \theta_k \\ & \text{s.t.} \\ & \theta_k X_{ik} - \sum_{j=1}^N X_{ij} \lambda_{jk} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^N Y_{rj} \lambda_{jk} \geq Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^N \lambda_j Y_{1j} \leq \pi_1 \\ & \sum_{j=1}^N \lambda_j Y_{2j} \leq \pi_2 \\ & \lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Görüleceği üzere ilk iki kısıt dışındakiler, standart düal *DEA-CCR* modelinin kısıtlarıdır. Bu modele karşılık gelen primal model ise şöyledir:

$$\begin{aligned}
& \max \\
& \phi_k = \sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rk} - \pi_1 \kappa_1 - \pi_2 \kappa_2 \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ik} = 1 \\
& -Y_{1j} \kappa_1 - Y_{2j} \kappa_2 + \sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \\
& \kappa_{1,2} \geq 0, \quad \mu_{rk} \geq 0, \quad \nu_{ik} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

Yeni modelin çözümüne ilişkin sonuçlar Tablo 8.3'te verilmiştir. Söz konusu modelin 21 otel için çözülmesiyle, etkin ve etkin olmayan oteller belirlenmiştir. Tablo 8.3'te otellerin etkinlik skorları olan, τ_{ts} , ve her bir girdi ve çıktıya verdikleri ağırlıklar, (ν ve μ), sunulmaktadır. Analiz sonucunda etkin bulunan oteller - yani 3, 4, 7 ve 9 numaralı oteller- için τ_{ts} değeri 100 olarak görülmektedir.

Kısıtlı düal *DEA-CCR* model çözümü sonucunda aynı etkinlik skorları bulunmuş; ayrıca, etkinlik sonuçlarına ek olarak yönetsel bilgi türetmeye imkan veren düal değişken λ 'nın değerleri de, elde edilmiştir. Bu modele ilişkin düal değişken değerleri Tablo 8.4'te sunulmuştur. Pozitif değer alan düal değişkenlerin karşılık geldiği karar birimleri, ilgili karar biriminin referans setini oluşturmaktadır. Diğer bir deyişle, etkin bulunan karar birimleri, kendi referans setlerindeki tüm karar birimlerinin doğrusal bir kombinasyonu sayesinde etkin sınıra ulaşabileceklerdir. Bahsi geçen doğrusal kombinasyondaki karar birimlerinin ağırlıklarını, düal değişkenlerin aldıkları değerler belirtmektedir. Kısıtsız *DEA* modelleri için geçerli olan bu ifade, etkinlik analizinde kullanılan kısıtlı model için geçerliliğini kısmen de olsa korumaktadır. Kısıtsız modellerde sadece etkin olmayan karar birimlerinin referans setleri oluşturmalarına karşın, kısıtlı modelde etkin olmayan karar birimlerine de referans verilmektedir. Nitekim, 10, 12, 19 numaralı etkin bulunmayan oteller, çeşitli karar birimlerinin referans setlerinde yer almıştır. Öte yandan, etkin bulunan 3 numaralı karar birimi, hiçbir otelin referans setinde yer almamakta-

Otel	τ_{ts}	ν_1 10^{-2}	ν_2 10^{-2}	ν_3	μ_1	μ_2	μ_3 10^{-2}	κ_1	κ_2
1	0.83	0	0.97	0	0.83	0.32	3.57	0	0
2	0.36	0	0.40	0	0.60	0	1.80	0	0
3	1.00	0	1.43	3.13	0.23	1.14	0	0	0
4	1.00	0	1.25	2.73	0.20	0.99	0	0	0
5	0.60	0	1.00	0	0.86	0.33	3.68	0	0
6	0.54	0	0.04	2.40	0	0	9.86	0	0
7	1.00	0	0.90	0	0.78	0.30	3.34	0	0
8	0.22	0	0.40	0	0.34	0.13	1.47	0	0
9	1.00	0	1.25	0	1.07	0.41	4.60	0	0
10	0.95	0	0	0.98	0	0	5.43	0	0.27
11	0.46	0	0.67	0	0.49	0.27	0	0	0
12	0.99	0	0	1.44	0	0	5.87	0	0.01
13	0.45	0	0.25	0	0	0	6.42	0	0.85
14	0.12	0	0.07	0.44	0	0.05	1.98	0	0
15	0.19	3.68	0.22	0	0	0.21	0	0	0
16	0.41	0	0	1.26	0	0	5.14	0	0.01
17	0.55	0	0	0.84	0	0	3.44	0	0.01
18	0.64	0	0.15	0.90	0	0.10	4.06	0	0
19	0.67	0	0.56	0	0	0	3.80	0	0
20	0.34	0	0.15	0.93	0	0.11	4.16	0	0
21	0.81	0	0.28	0.10	0	0.0	8.88	0	1.18

Tablo 8.3: Kısıtlı *DEA-CCR* Model Sonuçları

Otel No	Referans Seti	Düal Değişkenler ($\times 10^{-1}$)					
		λ_4	λ_7	λ_9	λ_{10}	λ_{12}	λ_{19}
1	4-7-9	0.053	4.252	4.864			
2	7-9		3.731	6.135			
3	*						
4	*						
5	4-7-9	0.512	1.528	5.134			
6	7-9		2.953	6.767			
7	*						
8	4-7-9	5.564	1.550	1.112			
9	*						
10	7-10-12		2.759		5.570	3.192	
11	4-9	1.266		7.747			
12	7-9-12		0.190	0.531		9.789	
13	7-19		5.336				6.564
14	4-7-9	3.293	1.810	2.529			
15	4-9	8.891		0.298			
16	7-9-12		3.560	5.795		1.091	
17	7-9-12		8.627	1.172		1.210	
18	4-7-9	0.311	8.489	0.136			
19	7		10.983				
20	4-7-9	5.484	2.805	0.675			
21	7-10-19		4.486		4.393		3.061

Tablo 8.4: Kısıtlı Düal *DEA-CCR* Model Sonuçları

dır. Aslında bu durum, 3 numaralı karar biriminin ekstrem bir gözlem olduğunu göstermektedir.

Etkin olmayan oteller için hedeflenen girdi/çıkıtı miktarlarının hesaplanmasına ilişkin tablo, Tablo 8.5'te sunulmuştur.

Açıklayıcı bir örnek, 17 numaralı karar birimi üzerinden verilmiştir. Bu karar biriminin mevcut girdi ve çıktı değerleri (80.00, 260, 1.176, 0.20, 0.82, 1.608)'dir. İlgili düal modelin çözümünde pozitif değer alan düal değişkenler $\lambda_7 = 0.8627$, $\lambda_9 = 0.1172$, $\lambda_{12} = 0.1210$ bulunmuştur. Böylece, 17 numaralı karar biriminin referans seti 7, 9, 12'den oluşmaktadır. Doğrusal kombinasyonlar sonucunda bulunan ve Otel 17 için rol modeli olan hipotetik karar birimi,

$$\begin{aligned} X_{17}^o &= \sum_{i \in \{7,9,12\}} \lambda_i X_i \\ Y_{17}^o &= \sum_{i \in \{7,9,12\}} \lambda_i Y_i \end{aligned}$$

ifadeleri çerçevesinde (3.58, 142, 0.641, 0.31, 1.00, 1.608) olarak tanımlanmaktadır.

Etkinlik skorları incelendiğinde, 4 yıldızlı otellerin etkinlik ortalaması %72 olarak bulunurken aynı değer 5 yıldızlı oteller için %52'dir. Bu iki değer kıyaslaması, açıkça 4 yıldızlı otellerin 5 yıldızlılara olan etkinlik üstünlüğünü göstermektedir. Ancak, 4 yıldızlı otellerin hangi faktörler sebebiyle daha etkin olduklarını söyleyebilmek için Tablo 8.5 biraz daha ayrıntılı incelenmelidir. Doğrusal kombinasyonlar sonucunda oluşturulan hipotetik karar birimlerine ait girdi ve çıktı değerlerinin orijinal girdi/çıkıtı değerleriyle karşılaştırılması sonucu bulunan, girdi faktörleri için yüzde azalış ve çıktı faktörleri için yüzde artış değerleri tablodan okunabilir. Bu değerlerin 4 ve 5 yıldızlı oteller için ortalamaları, izlenme kolaylığı açısından Tablo 8.6'da verilmiştir.

Tablo 8.6'dan açıkça görüldüğü üzere belirgin farklar, bir kereden fazla gelen müşteri oranları, Y_1 , ve net kâr, Y_3 faktörlerinden kaynaklanmaktadır. Bir kereden fazla gelen müşteri oranı için 4 yıldızlılarda ortalama olarak %26.5'luk bir iyileşme olması öngörülürken, aynı faktör için 5 yıldızlı otellerde %95'lik bir iyileşme olması gerekmektedir. Bu değerler açıkça, Antalya yöresinde faaliyet gösteren 4 yıldızlı otellerin, bir yerde müşteri profiline de bağlı olarak, müşteri memnuniyeti sağlamada görece olarak daha başarılı olduğunu göstermektedir. Net kâr açısından

Ref.	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
4	2.57	50	0.137	0.10	0.99	0.235
7	3.25	110	0.643	0.25	0.89	1.607
9	0.84	80	0.033	0.50	1.00	0.110
10	22.50	330	1.010	0.08	0.81	2.244
12	5.57	310	0.684	0.30	0.95	1.725
19	7.71	180	1.138	0.15	0.80	1.765

Otel	X_1^o	% Δ	X_2^o	% Δ	X_3^o	% Δ	Y_1^o	% Δ	Y_2^o	% Δ	Y_3^o	% Δ
1	1.80	86	86	17	0.290	42	0.35	0	0.87	0	0.738	0
2	1.73	92	90	64	0.260	78	0.40	0	0.95	11	0.667	0
3	3.21	0	50	0	0.090	0	0.15	0	0.85	0	0.157	0
4	2.57	0	50	0	0.137	0	0.10	0	0.99	0	0.025	0
5	1.06	84	60	40	0.122	59	0.30	0	0.70	0	0.314	0
6	1.53	90	87	46	0.212	46	0.41	129	0.94	2	0.549	0
7	3.25	0	110	0	0.643	0	0.25	0	0.89	0	1.607	0
8	2.03	90	54	78	0.180	85	0.15	0	0.80	0	0.392	0
9	0.84	0	80	0	0.033	0	0.50	0	1	0	0.110	0
10	15.21	32	313	5	0.958	5	0.21	162	1	23	2.244	0
11	0.98	79	68	54	0.043	93	0.40	0	0.90	0	0.115	34
12	5.56	0	310	0	0.684	0	0.32	8	1	5	1.725	0
13	6.79	92	177	55	1.090	68	0.23	55	1	39	2.016	0
14	1.65	94	57	88	0.170	88	0.20	105	0.74	0	0.396	0
15	2.31	81	47	81	0.123	92	0.10	30	0.91	0	0.212	543
16	2.25	84	119	59	0.323	59	0.41	3	1	27	0.824	0
17	3.58	96	142	45	0.641	45	0.31	55	1	22	1.608	0
18	2.85	56	96	36	0.551	36	0.22	11	0.80	0	1.373	0
19	3.57	54	121	33	0.706	38	0.27	83	0.98	22	1.765	0
20	2.38	83	64	66	0.258	66	0.16	217	0.86	0	0.587	0
21	13.70	41	249	19	1.081	19	0.19	383	1	5	2.247	0

Tablo 8.5: Etkin Olmayan Oteller İçin Hedeflenen Girdi/Çıktı Miktarları

Otel Sınıfı	% azalış			% artış		
	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3
4★	50.3	27.6	37.1	26.5	3.3	3.1
5★	68.1	48.2	51.1	95.0	12.0	54.3

Tablo 8.6: Girdi (Çıktı) Faktörleri için % Ortalama Azalış (Artış)

kıyaslama yapıldığında yine benzer bir sonuca ulaşılmaktadır. 4 yıldızlı oteller için olması gereken net kâr artışları ortalaması %3.1'ken bu değer, 5 yıldızlı oteller için %54.3'tür. Diğer faktörler için de benzer yorumlar yapılabilir.

8.5 Genel Değerlendirme

Bu çalışmanın amacı, otel endüstrisi için bir etkinlik endeksinin elde edilme sürecinde *DEA* tekniğini kullanarak mevcut yaklaşımların bazı sakıncalarının ortadan kaldırılabileceğini göstermek ve bu yöntemin uygun bir somut örneklem üzerinde nasıl uygulanacağını ortaya koymaktır. Elde edilen sonuçlar, genelde söz konusu yöntemin kullanılabilirliğini ortaya koymuş ve özel olarak da Antalya yöresindeki 4 ve 5 yıldızlı otellerin karşılaştırmalı etkinlikleri hakkında yorum yapabilme imkanını sağlamıştır. Çalışmada standart *DEA-CCR* modeli, çıktı tanımlamalarının uygun olmaması sebebiyle kullanılamamış ve ek kısıtlar getirilmiştir. Matematiksel programlama tabanlı olan *DEA*, bu tip özel durumların ifade edilebilmesi bakımından kullanıcıya büyük esneklik sağlamaktadır.

Veri zarflama analizinin sağladığı bilgilerin, işletmenin yönetimi için, kısa dönemde faaliyetlere yönelik hedeflerin belirlenmesinde, uzun dönemde bu hedeflerin gerçekleştirilip gerçekleştirilmediğinin kontrolünü sağlamak bakımından ve yeni stratejilerin belirlenmesinde önemli bir işlevi olacağı anlaşılmaktadır. Öte yandan aynı tip sonuçların bütüncül olarak, Turizm Bakanlığı, Devlet Planlama Teşkilatı, Kalkınma Bankası gibi kuruluşlar açısından da önemli olacağı açıktır. İşletme bazındaki böyle bilgiler ve etkinlik sıralamaları, bir örneğini gördüğümüz turizm sektörü faaliyetlerinin ötesinde, işletmeler genelinde tesis alanlarının planlanmasına, yatırım teşviki kararlarına ve ileriye dönük politikaların belirlenmesine katkı sağlayacak niteliktedir.

Bölüm 9

Bankacılık Sektöründe DEA Uygulaması

Bu bölümde Tarım ve Cingi tarafından 1989-1996 yılları arasına ilişkin olarak Türk bankacılık sisteminde etkinlik ölçümünü *DEA* tekniğiyle gerçekleştiren bir çalışma verilmiştir¹.

9.1 Giriş

Türk Mali sistemindeki önemli payı ile ağırlığını giderek artıran bankacılık kesimi için verimlilik ölçümü konusu, güncelliğini koruyan bir olgudur. Özellikle ekonomide liberalleşme eğilimlerinin gelişmesiyle sınıai kuruluşlar gibi finansal kurumların da rasyonelleşme doğrultusundaki atılım ve girişimleri artmış; bunun rekabet gücü ve verimlilik üzerindeki etkileri daha yakından ve duyarlılıkla izlenir olmuştur. Liberalleşme doğrultusunda geliştirilen ekonomi politikalarının ithal ikameci, içe dönük bir ekonomiden vazgeçilmesini öngörmesi, bunun yerine dışa dönük bir ekonomik büyüme modelinin benimsenmesini gerekli kılması, ülkeleri doğal olarak küreselleşme olarak tanımlanan olgu içine çekmiştir. Bu durum da verimlilik konusunun gerek sistem bütünü, gerekse tekil kuruluşlar açısından hayati değerinde önem kazanmasına yol açmıştır. Dünya

¹A. Tarım ve S. Cingi, "Türk Banka Sisteminde Performans Ölçümü: DEA-Malmquist TFP Endeksi Uygulaması," Türkiye Bankalar Birliği, Araştırma Serisi, No:1, 2000.

tek pazarını hedef alarak yeniden yapılanma sürecine giren ekonomilerde politika seçimleri genel anlamda bir "verimlilik" kavramına dayandırılmak gerekliliğini ortaya koymaktadır. Nitekim sistemin ve onu oluşturan parçaların verimliliklerinin uluslararası rekabetçi düzeye çekilebilmesi, kamusal müdahale ve girişimlerin çapı ve yönünde, kuruluşların mülkiyet yapısı (kamu-özel) ile teknoloji ve ölçek açısından değişmelerini kaçınılmaz kılmaktadır. Bu nedenle dünya planındaki bir bütünleşme (entegrasyon) için çok yönlü yapılanma önlemleri ve bunların verimlilik üzerindeki etkilerini ölçmek için de çok yönlü ölçüm tekniklerinin kullanımının gerekliliği ortaya çıkmıştır.

Türk banka sisteminin 1989-1996 yıllarına ait verileriyle *DEA* tekniği kullanılarak gerçekleştirilen bu çok yönlü verimlilik ölçme çalışması yukarıda işaret edilen gerekleri yerine getirme amacına dönüktür.

Bu çalışma, 6 bölümden oluşmaktadır. §9.2'de, etkinlik ölçümünde kullanılan temel banka modelleri incelenmiş ve yeni bir banka modeli önerilmiştir. §9.3, etkinlik ölçümü için önerilen yeni banka modelinin Türk Banka Sistemi performans ölçümüne uygulanmasında kullanılan temel veri yapısını açıklamaktadır. §9.4'te, farklı varsayımları olan *DEA* modelleri kullanılarak bankaların etkinlik skorları yıllar itibariyle hesaplamıştır. Bunu takiben inceleme dönemi olan 1989-1996 dönemi için Malmquist Toplam Faktör Verimliliği Endeksi oluşturulmuştur. Son olarak §9.5'te genel değerlendirme ve sonuçlar verilmiştir.

9.2 Etkinlik Ölçümü İçin Bir Banka Modeli

Bankacılık sektöründe gerek tekil bankaların gerekse sektörün tümünü içermek üzere toplam bankaların performans değerlendirmesi çeşitli finansal rasyoların kullanımıyla gerçekleştirilmesi yaygın bir uygulamadır. Bankaları ve bankacılık sektörünü sermaye yeterliliği, aktif kalitesi, kârlılık, gelir-gider yapısı ve likidite boyutlarında değerlendirmek üzere kullanılan ve genel kabul görmüş rasyolar için örneğin IBAR Grubu [1] çalışmalarına bakılabilir.

Rasyoların tek başlarına bankaların etkinliklerinin değerlendirilmesinde kullanılması çeşitli zaaf ve sakıncaları taşımaktadır. Etkinlik ölçümünde çok sık kullanılan rasyolar birden çok girdi ve çıktının söz konusu olduğu durumlarda yetersiz kalmaktadır. Çünkü, bu yaklaşım esas ola-

rak tek bir çıktının tek bir girdiye oranı olarak tanımlanmaktadır. Tüm girdilerin ve çıktıların ortak bir birime dönüştürülemediği durumlarda etkinlik ölçme sürecine konu olan girdiler ve çıktılar ayrı ayrı değerlendirilmek zorunda kalmaktadır. Bu ise çoğunlukla yorumlanması imkansız sonuçların ortaya çıkmasına sebep olmaktadır. Oranlar tek başlarına fazla bir anlam ifade etmemektedir. Oranların birlikte değerlendirilmesi de durumu değiştirmemektedir. Girdi ve çıktı sayısının artması durumunda analiz daha da etkisiz kalmaktadır. Çünkü, x adet girdi ve y adet çıktıdan bahsedilen bir analizde incelenmesi gereken xy adet oran bulunmaktadır.

Oran analizinin bazı zayıflıklarının üstesinden gelebilmek için çoklu regresyon analizine başvurulmaktadır. Çoklu regresyon analizi sayesinde bir organizasyonun çıktısı ile girdileri arasındaki ilişki parametrik olarak tanımlanmaya çalışılmaktadır. Tanımlanan fonksiyona bağlı olarak belirli bir karar biriminin çıktı düzeyi öngörülmektedir. Böylece, çıktı düzeyleri öngörülen düzeyin üzerinde olan karar birimleri etkin olarak kabul edilirken, diğerleri etkin olmayanlar sınıfına sokulmaktadır. Bu yaklaşımın zaafı ise üç grupta özetlenebilir. İlk olarak, çoklu regresyon sadece tek bir çıktıyı dikkate alıyor olması sebebiyle tüm çıktıların ortak birim üzerinden tek bir değere indirgenmesini zorunlu kılmaktadır. Daha önce açıklandığı üzere, bu durum çıktıların birimlerinin farklı olduğu zaman mümkün değildir. İkinci olarak, regresyon analizi etkinlik ölçümünde en verimli birimi referans olarak diğerlerinin etkinliğini buna göre bulmak yerine, etkinlik ölçütü olarak ortalama değeri almaktadır. Böylece, analiz sonucu etkin olarak bulunan birimler aslında sadece ortalamanın üzerinde verime sahip olan birimler olmaktadır. Son olarak, regresyon analizi üretim fonksiyonunu parametrik olarak belirlemeye çalışmaktadır. Halbuki, farklı karar birimleri farklı teknolojiler kullanarak farklı girdi kombinasyonu ile üretim yapabilmektedirler. Diğer bir deyişle, regresyon analizinin özünde yatan üretim fonksiyonunun tek bir şekilde tanımlanması varsayımı etkinlik analizine konu olan karar birimlerinin doğasına uymamaktadır. Tüm bu açıklamalar ışığında regresyon analizinin etkinlik ölçümü için uygun bir analiz şekli olmadığı sonucuna varılır.

DEA tekniği bir karar biriminin göreceli etkinliğini toplam ağırlıklı çıktıların toplam ağırlıklı girdilerine oranı olarak tanımlanmaktadır. Bu bağlamda soru, farklı birimler taşıyan girdi ve çıktılara ağırlıkların nasıl verilmesi gerektiğidir. *DEA* analizinin özü burada yatmaktadır. *DEA*,

her karar birimine girdi ve çıktıları ağırlıklandırmada esneklik tanımaktadır. Böylece farklı karar birimlerinin farklı üretim karışımları olabileceği gerçeği dikkate alınmaktadır. Karar birimleri ağırlıkların belirlenmesinde serbestiye sahiptirler; seçebilecekleri birçok ağırlık seti bulunmaktadır. Fakat aslında, tüm birimlerin seçim yaptıkları ağırlık seti aynıdır. DEA her karar biriminin kendi etkinlik skorunu maksimize edecek şekilde girdi ve çıktı ağırlıklarını seçeceğini varsaymaktadır. Çünkü farklı karar birimleri farklı çıktıları oluşturmak için farklı girdi kombinasyonları oluşturduklarından, ağırlıkların bu çeşitliliği yansıtacak şekilde seçileceği beklenebilir. Genellikle karar birimleri en az kullandıkları girdilere ve en çok ürettikleri çıktıları en yüksek ağırlıkları vereceklerdir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta ağırlıkların fiyat ile ilişkili olmadığı, fakat karar biriminin etkinliğini maksimize edecek karar değişkenleri olduğudur.

DEA analizinin sonuçları yönetsel açıdan son derece önemli bilgiler içerir. *DEA* analizi incelenen setteki her karar biriminin diğerlerine göre etkinliğini verir. Böylece, etkinliği düşük olan karar birimleri belirlenir ve bunların etkinliklerinin ne ölçüde artabileceğine ilişkin veriler elde edilir. Yönetim dikkatini etkinliği en düşük olan birimler üzerine toplayabilir. Eğer bir karar birimi etkin değilse, *DEA* analizi bu birimin etkinliğini artırabilmek için gerekli olan stratejileri etkin karar birimlerine referans vererek önerir. Bu bilgiler ışığında yönetim, etkin olmayan karar biriminin hangi girdileri gereğinden ne kadar fazla kullandığı, hangi çıktılar açısından ne ölçüde yetersiz üretim yaptığı, ve etkin olması için ne yapması gerektiği hakkında değerlendirme yapabilir. Nitekim, 1997 itibariyle 21 ülkede *DEA* tekniği kullanılarak yapılan bankacılık sistemine ilişkin performans ölçüm çalışmalarının sayısı 130'u bulmuştur ([24]).

Yapılan bu açıklamalar ışığında, Türk Bankacılık sistemi üzerine yapılacak olan etkinlik analizine *DEA* tekniği çerçevesinde yaklaşılması uygun görülmüştür.

Ticaret bankacılığında girdi ve çıktıların nelerden oluşacağı literatürde henüz üzerinde mutabakat sağlanmış bir husus değildir ([59]). Fakat yine de *DEA* tekniğinin kullanımıyla gerçekleştirilmiş olan araştırmalarda iki temel yaklaşımdan birinin benimsendiği görülmektedir. Söz konusu iki temel yaklaşım

- (a) üretim yaklaşımı (production approach)
- (b) aracılık yaklaşımı (intermediation approach)

olarak nitelenmektedir([86]).

Üretim yaklaşımında bankalar, emek, nakdi ve aynı sermaye gibi kaynakları (girdi) kullanarak vadeli ve vadesiz tasarruf mevduatı, ticari kredi, gayrimenkul edindirme ve tesis kredileri gibi çıktıları üretmek konumundaki kuruluşlar olarak kabul edilmektedir. Aracılık yaklaşımında ise bankalar topladıkları fonların kredi ve diğer varlıklara dönüştürülmesinde aracılık işlerini gerçekleştiren finansal kurumlar olarak tanımlanmaktadır.

Üretim yaklaşımında, çıktı olarak hesap adetleri aracılık yaklaşımında ise hesapların parasal değerleri kullanılmaktadır. Girdi açısından bakıldığında üretim yaklaşımında sadece işletme maliyetleri gözönünde bulundurulurken, aracılık yaklaşımında buna ek olarak faiz cinsinden maliyet de yer almaktadır.

Bu iki yaklaşımdan hangisinin seçileceği sorunu araştırmacının çözümünü araştırdığı problemle doğrudan ilgilidir. Örneğin üretim yaklaşımı bankaların maliyet etkinliğini araştırmayı amaçlayan çalışmalarda benimsenmekte ([75]), aracılık yaklaşımı ise tüm bankacılık sektörünün maliyet toplamı ile bankaların iktisadi rekabet gücünün araştırıldığı durumlarda kullanılabilir uygun bir yöntem olmaktadır ([23]).

Yukarıda sözü edilen iki yaklaşıma göre gerçekleştirilmiş olan çalışmalarla ilgili olarak tarafımızdan düzenlenen Tablo 9.1 çeşitli ülkelerdeki bankaların performans değerlendirmesinde seçilen girdi ve çıktıları göstermektedir. Her çalışmada etkinlik analizi için kullanılan banka modelinin girdi faktörleri sol sütunda ve çıktı faktörleri sağ sütunda listelenmiştir.

Tablo 9.1: Banka Performans Ölçümünde Kullanılan Girdi/Çıktı

Taylor et al. [129]

- | | |
|--------------------------|----------------|
| • Toplam mevduat | • Toplam Gelir |
| • Toplam faiz dışı gider | |

Ferrier-Hirschberg [74]

- | | |
|-----------------------------|-------------------------|
| • Personel sayısı | • Krediler |
| • Sabit varlıklar | • Bankalararası mevduat |
| • Tüketici mevduat hesabı # | • Yatırımlar |
| • Ticari mevduat hesabı # | • Şube sayısı |
| • Sınai mevduat hesabı # | |

Berg et al. [22]

- | | |
|-----------|------------------------|
| • İşgücü | • Vadesiz mevduat |
| • Makina | • Vadeli mevduat |
| • Malzeme | • Kısa vadeli krediler |
| • Bina | • Uzun vadeli krediler |
| | • Diğer hizmetler |

Rangan et al. [103]

- | | |
|-----------------------|----------------------------|
| • Personel sayısı | • Gayri menkul kredisi |
| • Defter değeri | • Ticari ve sinai krediler |
| • Mevduat sertifikası | • Tüketici kredisi |
| | • Vadesiz mevduat |
| | • Vadeli tasarruf mevduatı |

Ferrier-Lovell [75]

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| • Personel sayısı | • Vadesiz mevduat hesabı # |
| • Kira+Donanım giderleri | • Vadeli mevduat hesabı # |
| • Malzeme giderleri | • Gayri menkul kredisi |
| | • Tesis kredisi |
| | • Ticari kredi |
-

Elyasiani-Mehdian [59]

- Personel sayısı
- Sabit varlık
- Mevduat sertifikası
- Mevduatertif. dışı mevduat
- Toplam gelir

Thompson et al. [130]

- Personel sayısı
- Fiziki sermaye
- Yabancı fonlar
- Şube sayısı ve Mevduat
- Toplam kredi
- Toplam faiz dışı gelir

Charnes et al. [46]

- Toplam işletme giderleri
- Toplam faiz dışı harcama
- Şüpheli alacaklar karşılığı
- Batık kredi miktarı
- Toplam faaliyet geliri
- Toplam faiz geliri
- Toplam faiz dışı gelir
- Toplam kredi

Tatje-Lovell [128]

- Personel sayısı
- Personel dışı harcamalar
- Krediler
- Tasarruf ve Çek hesabı

Zaim [140]

- Personel sayısı
 - Faiz giderleri
 - Amortisman
 - Malzeme giderleri
 - Vadesiz mevduat
 - Vadeli mevduat
 - Kısa dönemli borç
 - Uzun dönemli borç
-

Tablonun incelenmesinden de açıkça görüleceği gibi, çalışmalarda girdi ve çıktı olarak seçilen faktörler sayı ve tür açısından farklılık göstermektedir. Doğaldır ki, araştırmacılar gözettikleri amaç doğrultusunda faktör ve/veya miktarlarını seçmek durumundadırlar.

Yukarıda yer alan modellerde kullanılan faktör bileşimleri için gerekli olan verilerin çoğu Türk Banka sistemi için derlenmemiştir. Bundan dolayı, gerekli verilerin bulunabildiği Meksika ve İtalyan modellerinin Türk Bankacılık sisteminde performans ölçümü için uygulaması ve sonuçları §9.6'da verilmiştir.

Bu çalışmada Türk Banka sisteminin sahip olduğu özellikler gözönünde bulundurularak yukarıdaki tabloda yer alan girdi-çıkıtı bileşimlerinden farklı bir biçimde faktörler belirlenmiş ve çalışma buna göre yürütülmüştür.

Bu araştırmada bankalar mevduat ve kredi pazarında rekabet ederek mevduatın krediye dönüştürülmesi sonucunda kâr sağlayan finansal kurumlar olarak kabul edilmektedir. Türk Banka sisteminde gerek kamusal sermayeli kuruluşların (yasalarla kurulmuş kamu bankaları) gerekse özel sermayeli ticari bankaların amaç fonksiyonları itibarıyla ayrılıklar taşımadıkları söylenebilir. Nitekim İktisadi Devlet Teşekkülü statüsündeki kamu bankalarının da özel sektör kuruluşları gibi kârlılık ve verimlilik ilkelerine uygun görev yapmaları gerektiği yasal bir zorunluluk olduğu bilinmektedir. Bu bağlamda bankaların mevduat pazarındaki paylarını artırarak kredi verilebilir fonlar arzına katkılarını büyütmeleri ve sonuçta kâr elde etmeleri gerektiği gerçeği, bu kuruluşların çıktıları olarak toplam mevduat, toplam kredi ve net kâr faktörlerinin seçilmesini gerektirmiştir. Bu faktörler üretim yaklaşımındaki gibi hesap sayısı ile değil, aracılık yaklaşımında olduğu gibi "parasal değerler" cinsinden ifade edilmiştir. Öte yandan toplam mevduat değerine çıktı olarak yer verilmesiyle de, aracılık yaklaşımından ayrılmış ve üretim yaklaşımı formuna girilmiştir ([130]). Bu yönüyle çalışmada kullanılan girdi-çıkıtı bileşimi, literatürdeki mevcut yaklaşımların her ikisine de uymamakta oluşuyla özgün bir nitelik taşımakta ve "karma yaklaşım" olarak tanımlanabilecek üçüncü bir ifade elde edilmektedir.

Banka Adı	Kod	Banka Adı	Kod
T.C. Ziraat Bankası	B01	Pamukbank	B12
T. Emlak Bankası	B02	Sümerbank	B13
T. Halk Bankası	B03	Dış Ticaret Bankası	B14
T. Vakıflar Bankası	B04	Ekonomi Bankası	B15
Akbank	B05	Ticaret Bankası	B16
Demirbank	B06	Garanti Bankası	B17
Egebank	B07	İmar Bankası	B18
Eskişehir Bankası	B08	İş Bankası	B19
İnterbank	B09	Yaşarbank	B20
İktisat Bankası	B10	Yapı-Kredi Bankası	B21
Koçbank	B11		

Tablo 9.2: Etkinlik Analizi yapılan 21 Banka ve Kodları

9.3 Türk Bankacılık Sistemine İlişkin Veri

DEA tekniği kullanılarak gerçekleştirilen bu çok yönlü etkinlik ölçme çalışması için gerekli olan Türk banka sisteminin 1989-1996 yıllarına ait veriler Türk Bankalar Birliği'nin yıllık istatistiklerinden derlenmiştir. Bahsi geçen 8 yıllık dönem için etkinlik incelemesine mevduat pazar payı %1'den büyük olan 21 banka alınmıştır. 1996 yılı itibariyle bu 21 bankanın mevduat pazar payı toplamı tüm sektör içinde %93.8 yer tutmaktadır. Dolayısıyla bankacılık sektörünün tamamına yakınının incelemeye alındığı söylenebilir. Tablo 9.2'de etkinlik analizi yapılan 4'ü devlet (mevduat pazar payı %45.1), 17'si özel (mevduat pazar payı %48.7) olmak üzere 21 banka ve çalışma boyunca kullanılacak olan kodları verilmiştir. Mevduat pazar payı %1'den küçük olan bankalar çoğunlukla özel uzmanlıkları olması sebebiyle etkinlik analizinde uç örnekler olarak yer almakta ve *DEA* tekniğinin doğası sebebiyle sonuçları belirgin şekilde etkilemektedir. Bu yüzden küçük bankalar analize sokulmamıştır. 1989-1996 yıllarına ait istatistiklerden 21 banka için toplam kâr, toplam kredi, toplam mevduat, kredi geri dönüş oranı, toplam aktifler ve toplam gider verileri derlenmiştir.

9.4 DEA Sonuçları ve Malmquist TFP Endeksi

İlk olarak 8 yıllık dönem için yıl bazında toplam kâr, toplam kredi, toplam mevduat ve kredi geri dönüş oranının çıktığı, toplam aktifler ve toplam giderin girdi olarak alındığı durum için ölçeğe göre sabit getiri varsayımı altında bankaların *DEA* etkinlikleri bulunmuştur. Diğer bir deyişle

$$\frac{\mu_{1k}[\text{kâr}]_k + \mu_{2k}[\text{kredi}]_k + \mu_{3k}[\text{mevduat}]_k + \mu_{4k}[\text{geri dönüş oranı}]_k}{\nu_{1k}[\text{aktif}]_k + \nu_{2k}[\text{gider}]_k}$$

ifadesindeki $\mu_{1,2,3,4k}$ ve $\nu_{1,2k}$ ağırlıkları Banka k için *CCR-DEA* modeli kısıtları altında bulunmuş ve maksimum etkinlik skorları hesaplanmıştır. Bulunan *DEA*-etkinlik skorları Tablo 9.3'te verilmiştir. Daha sonra, aynı veri üzerinden toplam kâr, toplam kredi ve toplam mevduat miktarı çıktığı, toplam aktifler ve toplam giderin girdi olarak alındığı, yani kredi geri dönüş oranının model dışı tutulduğu, durum için ölçeğe göre sabit getiri varsayımı altında bankaların *DEA* etkinlikleri bulunmuştur. Diğer bir deyişle

$$\frac{\mu_{1k}[\text{kâr}]_k + \mu_{2k}[\text{kredi}]_k + \mu_{3k}[\text{mevduat}]_k}{\nu_{1k}[\text{aktif}]_k + \nu_{2k}[\text{gider}]_k}$$

ifadesindeki $\mu_{1,2,3k}$ ve $\nu_{1,2k}$ ağırlıkları Banka k için *CCR-DEA* modeli kısıtları altında bulunmuş ve maksimum etkinlik skorları hesaplanmıştır. Bulunan *DEA*-etkinlik skorları Tablo 9.4'te verilmiştir. Beklendiği üzere, Tablo 9.3 ve 9.4'te verilmiş olan etkinlik skorları arasında yüksek korelasyon bulunmuştur. Parantez içinde verilen korelasyon değerleri yıl bazında şöyledir: 1989 (0.99), 1990 (0.93), 1991 (1.00), 1992 (1.00), 1993 (0.59), 1994 (1.00), 1995 (0.99), 1996 (0.94). Yüksek korelasyon değerlerinin tek istisnası 1993 yılında bulunan 0.59 değeridir. Tablo 9.3 ve 9.4 incelendiğinde bunun sebebi açık olarak görülmektedir. Korelasyon değerinin görece olarak düşük çıkmasının ardında yatan neden *B13* için 1993 yılı modelleri *DEA*-etkinlik sonuçlarının arasındaki büyük farktır. *B13*'te ortaya çıkan bu fark ihmal edilirse, korelasyon değeri olarak 1.00 bulunmaktadır. Bu açıklamaların ışığında etkinlik ölçme sürecinde kredi geri dönüş oranının bir faktör olarak modelde yer almasının kritik olmadığı sonucuna varılır. Kredi geri dönüş oranının modele sokulması gereken faktörlerden biri olduğuna karar verilmesi durumunda, alabileceği değerin üst sınırının (%100) bulunması nedeniyle uygulanan *DEA* modelinde değişiklikler yapılması gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Bu tür

Banka Kodu	Yıllar							
	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
B01	0.84	0.77	0.92	0.93	0.69	0.66	0.89	0.94
B02	0.91	0.89	0.94	0.98	0.81	0.72	0.89	0.94
B03	0.85	0.87	0.94	0.93	0.78	0.85	0.86	0.88
B04	0.90	0.96	0.91	0.95	0.90	0.86	0.89	0.99
B05	1	1	1	1	1	1	0.99	1
B06	1	0.94	1	0.99	1	0.73	1	0.92
B07	0.78	0.84	0.97	0.98	1	0.92	1	1
B08	0.89	0.82	0.96	0.93	0.91	0.83	0.79	0.88
B09	1	1	0.89	1	0.67	0.68	0.78	0.95
B10	1	0.96	0.94	1	0.70	0.70	0.88	0.93
B11	1	1	1	1	1	1	1	1
B12	0.81	0.89	1	1	0.88	0.94	0.92	1
B13	0.90	1	1	0.68	1	1	1	1
B14	1	0.96	1	1	0.75	0.64	1	1
B15	1	0.92	0.98	1	1	0.89	1	1
B16	0.96	0.99	0.96	1	1	1	0.99	0.97
B17	0.93	0.97	0.95	1	1	1	1	1
B18	1	1	1	1	1	1	1	1
B19	0.87	0.87	0.91	0.96	0.91	0.94	0.92	1
B20	0.93	0.94	1	0.99	0.76	0.93	0.90	0.95
B21	0.96	1	0.87	0.88	0.87	0.93	1	1

Tablo 9.3: 6 Faktörlü Model için *CCR-DEA* Sonuçları

Banka Kodu	Yıllar							
	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
B01	0.85	0.77	0.92	0.93	0.69	0.66	0.89	0.94
B02	0.91	0.89	0.94	0.98	0.81	0.72	0.89	0.95
B03	0.85	0.87	0.94	0.93	0.78	0.85	0.86	0.88
B04	0.90	0.96	0.92	0.95	0.90	0.86	0.89	0.99
B05	1	1	1	1	1	1	0.99	1
B06	1	0.94	1	0.99	1	0.73	1	0.88
B07	0.74	0.81	0.96	0.95	0.99	0.92	1	1
B08	0.89	0.82	0.96	0.94	0.91	0.83	0.79	0.87
B09	1	1	0.89	1	0.67	0.68	0.78	0.89
B10	1	0.96	0.94	1	0.70	0.70	0.86	0.90
B11	1	1	1	1	1	1	1	1
B12	0.81	0.89	1	1	0.88	0.94	0.92	1
B13	0.90	1	1	0.68	0.41	1	1	0.97
B14	1	0.96	1	1	0.75	0.58	1	1
B15	0.97	0.79	0.97	1	1	0.89	0.95	0.99
B16	0.96	0.99	0.96	1	1	1	0.99	0.97
B17	0.93	0.97	0.95	1	1	1	1	1
B18	1	1	1	1	1	1	1	1
B19	0.87	0.87	0.91	0.96	0.91	0.94	0.92	1
B20	0.90	0.92	1	0.99	0.76	0.93	0.90	0.95
B21	0.96	1	0.87	0.88	0.87	0.93	1	1

Tablo 9.4: 5 Faktörlü Model için *CCR-DEA* Sonuçları

	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
1989	1.00							
1990	0.65	1.00						
1991	0.12	0.12	1.00					
1992	0.28	-0.05	0.08	1.00				
1993	0.09	-0.07	0.14	0.65	1.00			
1994	-0.13	0.26	0.25	-0.18	0.38	1.00		
1995	0.16	0.34	0.44	-0.11	0.34	0.46	1.00	
1996	-0.06	0.19	0.17	0.02	0.31	0.52	0.69	1.00

Tablo 9.5: Yıllar İtibariyle Etkinlik Skorları Arasındaki Korelasyon

düzenlemeler ile ilgili olarak Ray'ın yaptığı [105] çalışma incelenebilir. Diğer 5 faktör (kâr, kredi, mevduat, aktif, gider) içinde benzer bir analiz yapılmış ve bu faktörlerin modelde yer alması gerektiği görülmüştür. Bu 5 faktörün üst sınırlarının bulunmaması sebebiyle DEA modelinde herhangi bir değişikliğe gerek yoktur.

5 faktörlü modelin yıllar itibariyle etkinlik skorları arasındaki korelasyon değerleri Tablo 9.5'te verilmiştir. Tablo 9.5'ten görüleceği üzere etkinlik skorlarının çoğunlukla pozitif olmasına rağmen yüksek korelasyondan söz etmek mümkün değildir. Sonuçların durağan bir yapı olmadığına işaret etmesi sebebiyle etkinlik analizinin dinamik yapıyı içerecek şekilde düzenlenmesi gerekmektedir. Tablo 9.4 üzerinde 1.00 *DEA*-etkinlik skoru olan bankalar görece olarak etkindirler. Bu bankaların sayısı yıllara göre değişim göstermekle birlikte, 6 ve 10 arasındadır. *DEA* analizinde tüm karar birimleri, ölçeklerinden bağımsız olarak, tek bir birim olarak algılandıkları için etkinlerin sayısı önemli bir gösterge olmaktan uzaktır. Daha anlamlı bir ölçüt olarak etkin bankaların analize konu edilen tüm bankalar arasındaki mevduat pazar payı alınabilir. Yıllara göre *DEA* analizi sonucu göreceli olarak etkin bulunan bankaların toplam mevduat pazar payı Tablo 9.6'da verilmiştir.

Daha önce açıklandığı üzere *CCR-DEA* modeli ölçüğe göre sabit getiri varsayımı altında *DEA*-etkinliğini (toplam etkinlik) ölçerken, *BCC-DEA* modeli ölçüğe göre değişken getiri varsayımı altında teknik etkinliği ölçmektedir. Yine daha önce açıklandığı üzere $\tau_{ts} = \tau_t \times \tau_s$. Bu bağlamda *CCR-DEA* modeli yardımıyla Tablo 9.4'te verilen etkinlik değerlerinin

1989		1990		1991		1992		1993		1994		1995		1996	
#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
5	9.4	5	9.2	5	8.9	5	8.5	5	7.6	5	7.7	6	1.3	5	6.1
6	0.4	9	0.8	6	0.4	9	0.3	6	1.6	11	0.9	7	1.4	7	1.2
9	0.6	11	0.4	11	0.4	10	0.5	11	0.6	13	0.1	11	1.5	11	1.6
10	0.9	13	1.3	12	6.3	11	0.4	15	0.5	16	4.8	13	0.5	12	5.1
11	0.4	18	1.2	13	2.6	12	5.8	16	5.6	17	4.5	14	0.6	14	0.7
14	0.7	21	9.6	14	0.6	14	0.6	17	4.5	18	1.1	17	3.8	17	3.5
18	1.0			18	2.0	15	0.5	18	1.2			18	1.8	18	2.3
				20	2.2	16	4.7					21	8.8	19	8.6
						17	4.2							21	7.6
						18	1.1								
%13		%23		%23		%27		%22		%19		%20		%37	

Tablo 9.6: Etkinlerin Mevduat Pazar Payı

BCC-DEA modeli yardımıyla bulunacak olan etkinlik değerlerine bölünmesi sonucunda bankaların ölçek etkinliği belirlenebilir. Tablo 9.7’de, analize konu olan bankaların *BCC-DEA* modeli yardımıyla hesaplanan teknik etkinlik değerleri görülmektedir.

Tablo 9.4’deki değerlerin Tablo 9.7’deki değerlere bölünmesiyle elde edilen ölçek etkinliği değerleri Tablo 9.8’de verilmiştir.

§2’de açıklandığı üzere, karar birimleri için kurulan *CCR-DEA* modelinin optimal çözümündeki düal değişkenlerin toplam değeri ölçeğe göre getirinin yönünü göstermektedir. Bunun geçerli olabilmesi için optimal çözümün tek olması şartı vardır. Banker ve Thrall tarafından geliştirilen yaklaşım tek optimal çözüm olma şartını kaldırarak, ölçeğe göre değişken getirinin yönünü söyleyebilmektedir. Çıktıya göre düzenlenen bu model

Banka Kodu	Yıllar							
	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
B01	1	1	1	1	1	1	1	1
B02	1	1	1	1	1	0.89	0.94	0.96
B03	1	1	1	0.97	0.92	0.96	1	0.96
B04	0.96	1	1	1	1	0.95	0.98	0.99
B05	1	1	1	1	1	1	1	1
B06	1	0.94	1	1	1	0.77	1	0.91
B07	0.74	0.83	0.98	0.98	1	0.92	1	1
B08	0.92	0.92	1	1	1	0.91	0.83	0.88
B09	1	1	1	1	0.84	0.71	0.78	0.95
B10	1	0.96	1	1	0.87	0.77	0.88	0.93
B11	1	1	1	1	1	1	1	1
B12	0.91	0.94	1	1	1	1	1	1
B13	0.99	1	1	0.69	1	1	1	1
B14	1	0.98	1	1	0.84	0.58	1	1
B15	1	0.89	0.97	1	1	0.95	1	1
B16	0.99	1	1	1	1	1	1	1
B17	1	1	1	1	1	1	1	1
B18	1	1	1	1	1	1	1	1
B19	1	1	1	1	1	1	1	1
B20	0.93	0.94	1	1	0.85	0.98	0.90	0.96
B21	1	1	0.97	0.91	1	1	1	1

Tablo 9.7: 5 Faktörlü *BCC-DEA* Modeli Sonuçları

Banka Kodu	Yıllar							
	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
B01	0.85	0.77	0.92	0.93	0.69	0.66	0.89	0.94
B02	0.91	0.89	0.94	0.98	0.81	0.80	0.96	0.98
B03	0.85	0.87	0.94	0.96	0.85	0.89	0.86	0.92
B04	0.94	0.96	0.92	0.95	0.90	0.90	0.91	0.99
B05	1	1	1	1	1	1	0.99	1
B06	1	1	1	0.99	1	0.95	1	0.97
B07	1	0.98	0.99	0.97	0.99	1	1	1
B08	0.97	0.89	0.96	0.94	0.91	0.91	0.95	1
B09	1	1	0.89	1	0.79	0.96	1	0.94
B10	1	1	0.94	1	0.80	0.91	0.98	0.97
B11	1	1	1	1	1	1	1	1
B12	0.89	0.95	1	1	0.88	0.94	0.92	1
B13	0.91	1	1	0.98	0.41	1	1	0.97
B14	1	0.97	1	1	0.89	1	1	1
B15	0.97	0.89	1	1	1	0.94	0.95	0.99
B16	0.97	0.99	0.96	1	1	1	0.99	0.97
B17	0.93	0.97	0.95	1	1	1	1	1
B18	1	1	1	1	1	1	1	1
B19	0.87	0.87	0.91	0.96	0.91	0.94	0.92	1
B20	0.97	0.98	1	0.99	0.89	0.95	0.99	1
B21	0.96	1	0.90	0.97	0.87	0.93	1	1

Tablo 9.8: Ölçek Etkinlikleri

aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
& \min \nu_0 \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{i=1}^m \nu_{ik} X_{ik} + \nu_0 = 1 \\
& \sum_{r=1}^s \mu_{rk} Y_{rk} = 1 \\
& \nu_0 - \sum_{r=1}^s \mu_{rj} Y_{rj} + \sum_{i=1}^m \nu_{ij} X_{ij} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N
\end{aligned}$$

Modelin optimum çözümündeki ν_0 değeri $-\nu_0^+$ olarak tanımlanır. Aynı model amaç fonksiyonu $-\nu_0$ olarak çözülür ve bu sefer optimum çözümündeki ν_0 değeri $-\nu_0^-$ olarak tanımlanır. Böylece herhangi bir optimum çözüm için $\nu_0^- \leq \nu_0^* \leq \nu_0^+$ elde edilir. ν_0^* için alt ve üst aralığın negatif olması ölçeğe göre azalan getiri (**D**), pozitif olması ölçeğe göre artan getiri (**I**) ve alt sınırın negatif, üst sınırın pozitif olması ölçeğe göre sabit getiri (**C**) olduğunu göstermektedir. Model sonuçlarının nasıl yorumlanacağı ile ilgili olarak, ayrıca, s.115-128 incelenebilir. Sonuçlar Tablo 9.9'da verilmiştir.

Etkinlik analizinde zaman boyutunu dikkate alabilmek için daha önce açıklanmış olan *Malmquist TFP endeksinin* oluşturulması gerekmektedir. Bunun için gerekli olan *uzaklık fonksiyon* değerleri hesaplanmış ve Tablo 9.10'da verilmiştir. $d^s(Y_t, X_t)$ uzaklık fonksiyonunun farklı bankalar için değerleri $t - s$ sütunundadır.

Uzaklık fonksiyonlarından hareketle hesaplanan Malmquist TFP endeksi ve bileşenleri olan *etkinlik değişimi* ve *teknik değişme* ise Tablo 9.13-9.15'de sunulmuştur. Kamu bankaları, özel bankalar ve sektörün tümü için verilen ortalama değişim değerleri geometrik ortalama kullanılarak hesaplanmıştır.

Tablo 9.13-9.15'de verilmiş olan değerlerin grafikler yardımıyla gösterimi Şekil 9.1-9.4'dedir. Şekil 9.1'de teknik değişme, Şekil 9.2'de etkinlik değişimi, Şekil 9.3'te teknik ve etkinlik değişimini birlikte yansıtan Malmquist TFP endeksi çizilmiştir. Her üç grafikte 1989 yılına başlangıç değeri olarak 1.00 ile başlatılmışlardır. Kümülatif değişim değerleri çerçevesinde grafikler elde edilmiştir. Şekil 9.4 ise Tablo 9.10'da verilmiş

Kod	89-	89+		90-	90+		91-	91+		92-	92+	
B01	-1.00	-0.01	D	-1.00	-0.02	D	-0.02	0.00	D	-1.00	-0.01	D
B02	-0.56	-0.01	D	-0.63	-0.01	D	-0.02	-0.01	D	-0.80	0.00	D
B03	-0.07	-0.02	D	-0.13	-0.02	D	-0.03	-0.03	D			
B04				-0.09	-0.02	D	-0.04	-0.03	D	-0.28	-0.01	D
B05	-1.00	0.01	C	-1.00	0.03	C	0.00	0.00	C	-1.00	0.01	C
B06	-0.12	∞	C				-0.10	0.00	C	-0.34	-0.01	D
B07												
B08							-0.10	-0.05	D	-0.29	-0.03	D
B09	-0.52	0.48	C	-0.46	0.29	C	-0.08	-0.08	D	-0.61	0.19	C
B10	-0.54	0.16	C				-0.20	-0.05	D	-0.29	0.02	C
B11	-0.21	∞	C	-0.25	∞	C	0.00	0.00	C	-0.23	∞	C
B12							-0.05	0.00	D	-0.21	0.01	C
B13				-0.27	0.00	C	0.00	0.00	C			
B14	-0.17	0.00	C				-0.12	0.00	C	-0.38	0.21	C
B15	0.07	0.15	I							-0.07	0.74	C
B16				-0.13	0.00	D	-0.05	-0.03	D	-0.15	0.00	C
B17	-0.13	-0.02	D	-0.07	-0.02	D	-0.05	-0.02	D	-0.72	0.02	C
B18	-0.16	0.18	C	-0.16	0.15	C	0.00	0.00	C	-0.13	0.48	C
B19	-0.91	-0.01	D	-1.00	-0.02	D	-0.10	-0.02	D	-1.00	-0.01	D
B20							-0.15	-0.08	D	-0.03	0.00	D
B21	-0.37	-0.01	D	-0.46	0.00	C						
Kod	93-	93+		94-	94+		95-	95+		96-	96+	
B01	-1.00	-0.18	D	-1.00	-0.19	D	-1.00	-0.01	D	-0.01	-0.01	D
B02	-0.85	-0.02	D									
B03							-0.37	-0.06	D			
B04	-0.34	-0.02	D									
B05	-1.00	0.01	C	-1.00	0.00	D	-0.71	0.00	D	0.00	0.00	C
B06	-0.45	0.13	C				-0.55	0.60	C			
B07	0.09	0.27	I				-0.01	0.06	C	0.05	0.00	C
B08	-0.36	-0.06	D									
B09												
B10												
B11	-0.44	0.29	C	-0.46	0.21	C	-0.36	0.56	C	0.00	0.00	C
B12	-0.11	-0.02	D	-0.15	-0.01	D	-0.24	-0.04	D	-0.01	0.00	D
B13	1.77	∞	I	-0.82	∞	C	-0.03	∞	C	0.15	0.15	I
B14							-0.13	0.95	C	0.00	0.00	C
B15	-0.19	0.26	C				0.13	0.86	I	0.03	0.03	I
B16	-0.31	0.00	D	-0.19	0.00	C	-0.16	-0.01	D	-0.09	-0.09	D
B17	-0.73	0.02	C	-0.78	0.01	C	-0.46	0.08	C	0.00	0.00	C
B18	-0.25	0.25	C	-0.33	0.42	C	-0.22	0.39	C	0.03	0.00	C
B19	-1.00	-0.02	D	-1.00	-0.01	D	-0.95	-0.15	D	0.00	0.00	D
B20												
B21	-0.63	-0.02	D	-0.78	-0.01	D	-1.00	0.02	C	0.00	0.00	C

Tablo 9.9: Ölçeğe Göre Getiri

	<i>B01</i>	<i>B02</i>	<i>B03</i>	<i>B04</i>	<i>B05</i>	<i>B06</i>	<i>B07</i>
89*	0.845	0.908	0.847	0.904	1	1	0.739
89-90	0.712	0.837	0.833	0.913	0.984	1.001	0.800
90-89	0.911	0.945	0.906	0.968	1.332	1.020	0.822
90*	0.768	0.894	0.869	0.964	1	0.939	0.808
90-91	0.953	0.946	1.020	0.923	1.080	1.053	0.882
91-90	0.739	0.868	0.867	0.973	1.080	0.854	0.818
91*	0.918	0.941	0.939	0.915	1	1	0.962
91-92	0.873	0.951	0.995	0.974	1.414	0.938	0.965
92-91	0.979	0.935	0.871	0.886	0.901	1.063	1.040
92*	0.931	0.983	0.933	0.948	1	0.990	0.951
92-93	0.929	0.835	0.855	0.967	1.087	0.794	0.969
93-92	0.725	0.961	0.872	1.030	1.162	1.999	1.036
93*	0.687	0.812	0.779	0.897	1	1	0.993
93-94	0.616	0.741	0.723	0.823	0.860	1.627	1.090
94-93	0.760	0.782	0.924	0.929	1.162	0.988	0.989
94*	0.659	0.715	0.854	0.858	0.999	0.731	0.920
94-95	0.669	0.776	0.841	0.857	1.020	0.811	0.904
95-94	0.873	0.756	0.874	0.882	1.015	1.245	0.995
95*	0.885	0.894	0.862	0.886	0.992	1	1
95-96	0.902	0.875	0.828	0.874	0.947	1.349	0.949
96-95	0.932	0.962	0.918	0.980	1.125	0.924	1.058
96*	0.944	0.945	0.883	0.986	1	0.879	1

Tablo 9.10: Uzaklık Fonksiyonu Değerleri (a)

	<i>B08</i>	<i>B09</i>	<i>B10</i>	<i>B11</i>	<i>B12</i>	<i>B13</i>	<i>B14</i>
89*	0.886	1	1	1	0.814	0.899	1
89-90	0.794	1.082	1.067	0.983	0.845	0.757	0.844
90-89	0.921	1.160	1.059	1.218	0.887	1.187	1.110
90*	0.820	1	0.961	1	0.887	1	0.956
90-91	0.971	1.137	1.086	1.327	0.904	1.236	1.128
91-90	0.901	1.017	0.879	1.263	0.918	0.869	0.947
91*	0.961	0.886	0.944	1	0.996	1	1
91-92	0.943	0.994	0.925	1.236	1.024	1.062	0.999
92-91	0.951	1.101	1.029	1.115	1.048	0.655	1.139
92*	0.935	1	1	1	1	0.681	1
92-93	0.866	0.766	0.833	0.943	0.932	0.722	1.046
93-92	1.052	0.956	1.006	1.651	1.008	0.628	1.035
93*	0.910	0.666	0.698	1	0.880	0.410	0.750
93-94	1.200	1.240	1.294	1.891	0.809	0.362	1.089
94-93	0.937	0.671	0.728	1.296	1.001	3.422	0.608
94*	0.830	0.683	0.702	1	0.943	1	0.581
94-95	0.836	0.670	0.748	1.136	0.933	2.623	0.602
95-94	0.796	0.783	0.882	1.333	0.932	0.950	0.976
95*	0.792	0.781	0.861	1	0.920	1	1
95-96	0.844	0.774	0.878	1.201	0.946	0.990	1.067
96-95	0.872	0.830	0.895	1.014	1.012	1.008	1.053
96*	0.874	0.889	0.900	1	1	0.966	1

Tablo 9.11: Uzaklık Fonksiyonu Değerleri (b)

	<i>B15</i>	<i>B16</i>	<i>B17</i>	<i>B18</i>	<i>B19</i>	<i>B20</i>	<i>B21</i>
89*	0.971	0.957	0.932	1	0.873	0.902	0.963
89-90	0.895	0.979	0.949	1.102	0.947	0.897	0.996
90-89	0.855	0.958	1.074	1.042	0.875	1.021	1.039
90*	0.792	0.994	0.973	1	0.867	0.923	1
90-91	0.854	0.970	0.970	1.150	0.943	0.889	0.908
91-90	0.952	1.032	0.919	1.327	0.916	1.079	0.915
91*	0.971	0.959	0.949	1	0.910	1	0.865
91-92	1.052	1.014	1.027	1.346	0.986	1.119	0.952
92-91	0.964	0.951	0.899	0.974	0.874	0.921	0.841
92*	1	1	1	1	0.958	0.987	0.883
92-93	0.928	1.039	0.975	1.171	0.892	0.837	0.767
93-92	1.471	1.054	1.483	1.248	0.963	0.891	0.957
93*	1	0.997	1	1	0.911	0.759	0.871
93-94	1.109	0.934	1.084	0.944	0.793	0.660	0.843
94-93	1.375	1.076	1.106	1.225	1.058	0.994	1.012
94*	0.893	1	1	1	0.937	0.927	0.933
94-95	1.068	0.991	0.964	1.222	0.947	0.912	0.922
95-94	0.967	0.991	1.180	1.027	0.864	0.898	1.043
95*	0.954	0.986	1	1	0.922	0.895	1
95-96	0.942	0.940	1.007	1.126	0.901	0.854	1.052
96-95	0.981	0.965	1.166	1.033	1.006	0.970	1.034
96*	0.985	0.968	1	1	0.999	0.953	1

Tablo 9.12: Uzaklık Fonksiyonu Değerleri (c)

	89-90	90-91	91-92	92-93	93-94	94-95	95-96
<i>B01</i>	1.187	0.805	1.052	1.029	1.133	0.986	0.984
<i>B02</i>	1.070	0.934	0.970	1.180	1.094	0.883	1.020
<i>B03</i>	1.030	0.887	0.939	1.106	1.080	1.015	1.041
<i>B04</i>	0.997	1.053	0.937	1.061	1.086	0.998	1.004
<i>B05</i>	1.163	1.000	0.798	1.034	1.163	1.001	1.085
<i>B06</i>	1.042	0.873	1.070	1.578	0.911	1.060	0.883
<i>B07</i>	0.969	0.883	1.044	1.012	0.990	1.006	1.056
<i>B08</i>	1.119	0.890	1.018	1.117	0.926	0.999	0.967
<i>B09</i>	1.035	1.004	0.991	1.369	0.726	1.011	0.970
<i>B10</i>	1.016	0.908	1.024	1.315	0.748	0.981	0.987
<i>B11</i>	1.113	0.976	0.950	1.323	0.828	1.083	0.919
<i>B12</i>	0.982	0.951	1.010	1.109	1.074	1.011	0.992
<i>B13</i>	1.187	0.838	0.951	1.202	1.967	0.602	1.026
<i>B14</i>	1.173	0.896	1.068	1.148	0.848	0.971	0.994
<i>B15</i>	1.082	0.954	0.943	1.259	1.178	0.920	1.005
<i>B16</i>	0.971	1.050	0.948	1.009	1.072	1.007	1.022
<i>B17</i>	1.040	0.986	0.911	1.233	1.010	1.106	1.076
<i>B18</i>	0.972	1.074	0.851	1.032	1.139	0.917	0.958
<i>B19</i>	0.965	0.962	0.918	1.066	1.139	0.963	1.015
<i>B20</i>	1.055	1.058	0.913	1.176	1.110	1.010	1.033
<i>B21</i>	1.003	1.079	0.930	1.125	1.058	1.028	0.992
$\mu(\text{kamu})$	1.069	0.916	0.973	1.092	1.098	0.969	1.012
$\mu(\text{özel})$	1.050	0.961	0.958	1.174	1.025	0.974	0.998
$\mu(\text{toplam})$	1.053	0.952	0.961	1.158	1.039	0.973	1.000

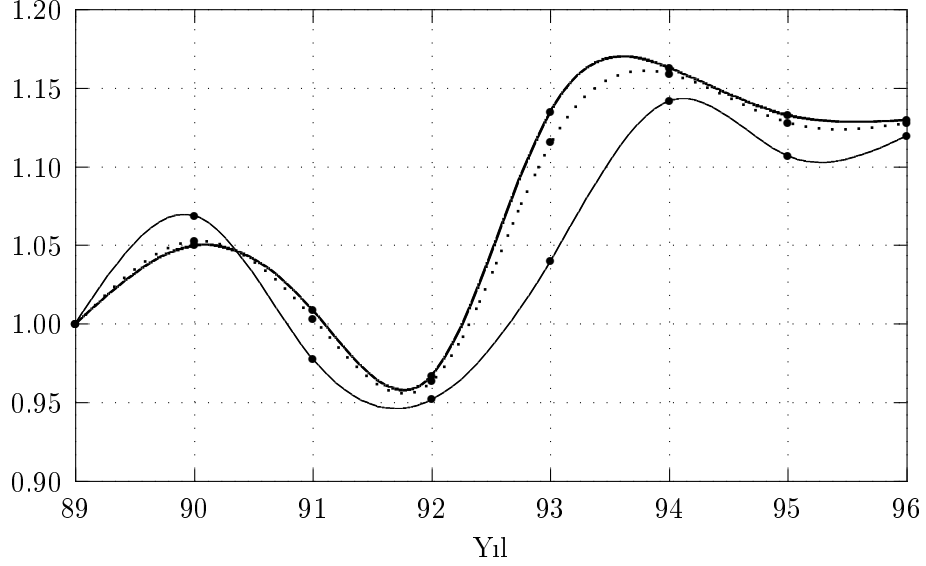
Tablo 9.13: Teknik Değişme

	89-90	90-91	91-92	92-93	93-94	94-95	95-96
<i>B1</i>	0.909	1.195	1.014	0.738	0.960	1.342	1.067
<i>B2</i>	0.985	1.052	1.044	0.826	0.881	1.250	1.057
<i>B3</i>	1.025	1.081	0.993	0.835	1.097	1.009	1.024
<i>B4</i>	1.066	0.949	1.036	0.946	0.957	1.033	1.113
<i>B5</i>	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.992	1.009
<i>B6</i>	0.939	1.065	0.990	1.010	0.731	1.367	0.879
<i>B7</i>	1.094	1.190	0.988	1.045	0.926	1.087	1.000
<i>B8</i>	0.926	1.172	0.973	0.974	0.911	0.954	1.105
<i>B9</i>	1.000	0.886	1.129	0.666	1.027	1.142	1.138
<i>B10</i>	0.961	0.982	1.060	0.698	1.006	1.225	1.046
<i>B11</i>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
<i>B12</i>	1.090	1.123	1.004	0.880	1.072	0.976	1.086
<i>B13</i>	1.113	1.000	0.681	0.601	2.441	1.000	0.966
<i>B14</i>	0.956	1.046	1.000	0.750	0.775	1.720	1.000
<i>B15</i>	0.816	1.226	1.030	1.000	0.893	1.068	1.032
<i>B16</i>	1.039	0.964	1.043	0.997	1.003	0.986	0.982
<i>B17</i>	1.045	0.975	1.053	1.000	1.000	1.000	1.000
<i>B18</i>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
<i>B19</i>	0.993	1.050	1.052	0.951	1.029	0.985	1.084
<i>B20</i>	1.023	1.084	0.987	0.769	1.220	0.966	1.064
<i>B21</i>	1.038	0.865	1.021	0.986	1.072	1.072	1.000
$\mu(\text{kamu})$	0.995	1.066	1.022	0.833	0.971	1.150	1.065
$\mu(\text{özel})$	0.999	1.032	0.996	0.889	1.026	1.077	1.021
$\mu(\text{toplam})$	0.998	1.039	1.001	0.878	1.016	1.091	1.029

Tablo 9.14: Etkinlik Değişimi

	89-90	90-91	91-92	92-93	93-94	94-95	95-96
$\mu(\text{kamu})$	1.063	0.976	0.995	0.910	1.066	1.114	1.077
$\mu(\text{özel})$	1.049	0.992	0.954	1.044	1.052	1.049	1.019
$\mu(\text{toplam})$	1.052	0.989	0.962	1.017	1.055	1.061	1.030

Tablo 9.15: Malmquist TFP Endeksi



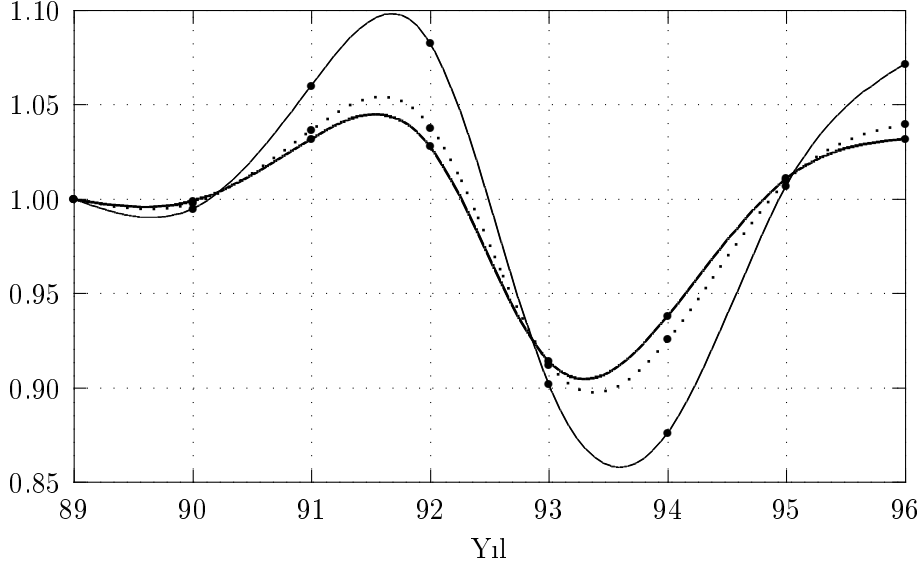
Şekil 9.1: Teknik Değişme

olan *DEA*-etkinlik skorlarını kamu, özel ve sektör ortalamalarını gösterecek şekilde düzenlenmiştir. Kamu bankalarına ait grafik düz çizgili, özel sektör bankalarına ait grafik kalın düz çizgili ve sektörün tamamına ait grafik noktalı olarak çizilmiştir. Ortalamaların hesaplanmasında geometrik ortalama kullanılmıştır.

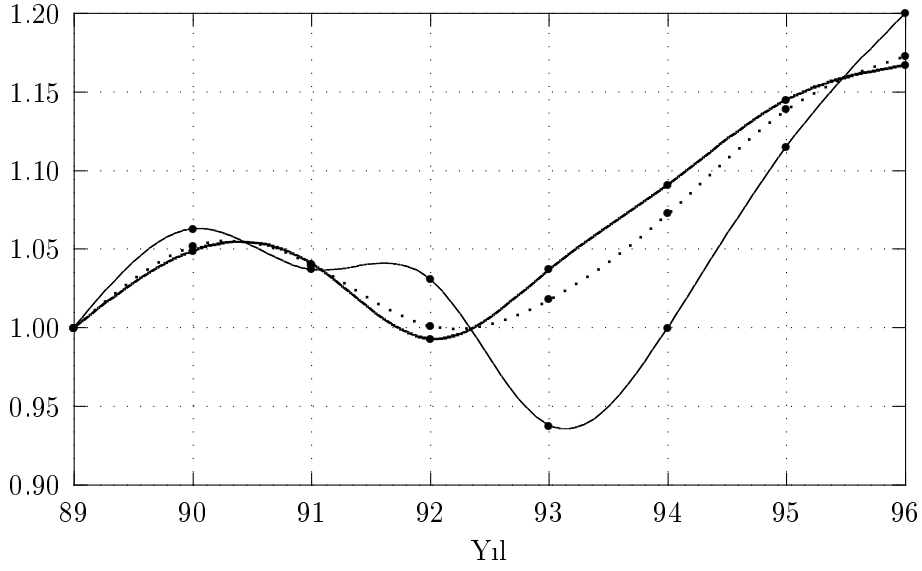
9.5 Değerlendirme ve Sonuç

DEA tekniğinin kullanımıyla Türk Banka Sisteminin 1989-1996 dönemine ait performansının değerlendirilmesini amaçlayan bu çalışmada elde olunan bulgulara topluca bakıldığında aşağıda yer alan yorumlara ulaşılmaktadır.

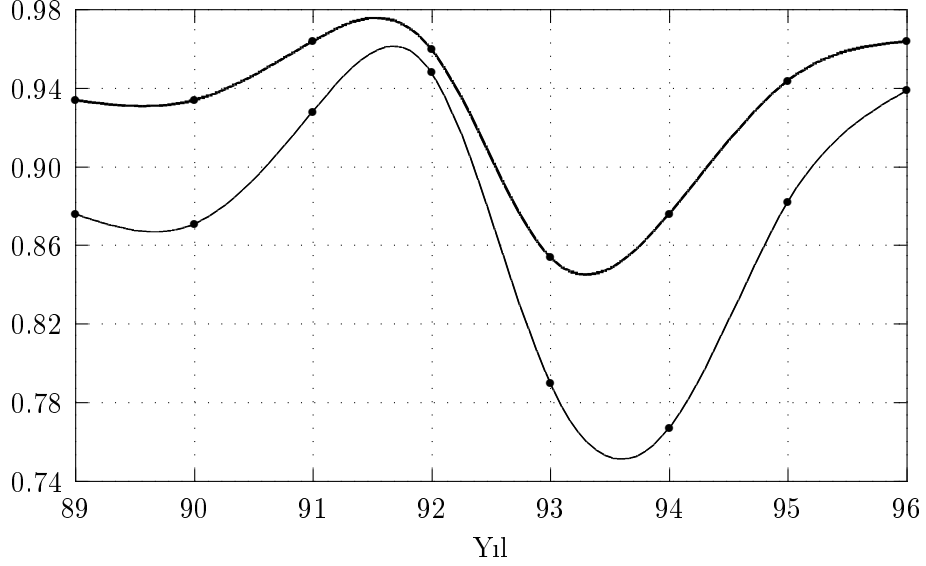
Tipik bir oligopolcü yapı özelliği gösteren Türk Banka sisteminde ileri derecede bir yoğunlaşma gözlenmektedir. Araştırma kapsamına dahil edilen mevduat pazar payı %1'in üstündeki ticaret bankaları (21 adet) toplam ticaret bankalarının %37.5 iken toplam mevduatın %93.8'ini toplamışlardır. Araştırma kapsamına alınan bankaların kamu-özel ayrımına



Şekil 9.2: Etkinlik Değişimi



Şekil 9.3: Malmquist TFP Endeksi



Şekil 9.4: DEA-Etkinlik Skoru

göre dağılımına ve mevduat pazar paylarına bakıldığında da yoğunlaşmanın oluşmuş olduğu açıkça görülmektedir. Nitekim söz konusu 21 bankanın 4 adedinin kamusal sermayeli, 17 adedinin de özel sektöre ait olduğu gerçeği ve pazar paylarının da sırasıyla %45.1 ve %48.7 olarak hesaplanmış olması yukardaki yargıyı doğrulamaktadır.

Kamusal sermayeli bankaların ağırlıklı olarak yer aldığı Türk Banka Sisteminde incelenen dönem boyunca etkinlik skorları korelasyonunun bir tutarlılık göstermemiş olması, her yılın etkinlik sıralamasının değişken karakterde olduğuna işaret etmektedir. Ancak özel sektöre ait değişmeyen üç holding bankasının dönem boyunca tam etkin konumda buldukları saptanmıştır. Oysa Kamu bankalarının hiçbirisi anılan dönemin herhangi bir yılında dahi etkin konumda olmayı başaramamıştır. Buna karşılık özel sektörde değişmez etkin bankaların (*B5*, *B11*, *B18*) yanında her yıl değişen 5-6 adet diğer özel sektör bankalarının yer aldığı görülmüştür. İnceleme, sadece bir tek özel bankanın anılan dönemde tam etkin konuma hiç ulaşamamış olduğunu göstermektedir. Bu durum, özellikle özel sektöre ait bankaların üçünde istikrarlı bir biçimde etkinlik gerçekleşmesini, diğerlerinde de dinamik bir süreçte etkinlik arayışını ifade

etmektedir.

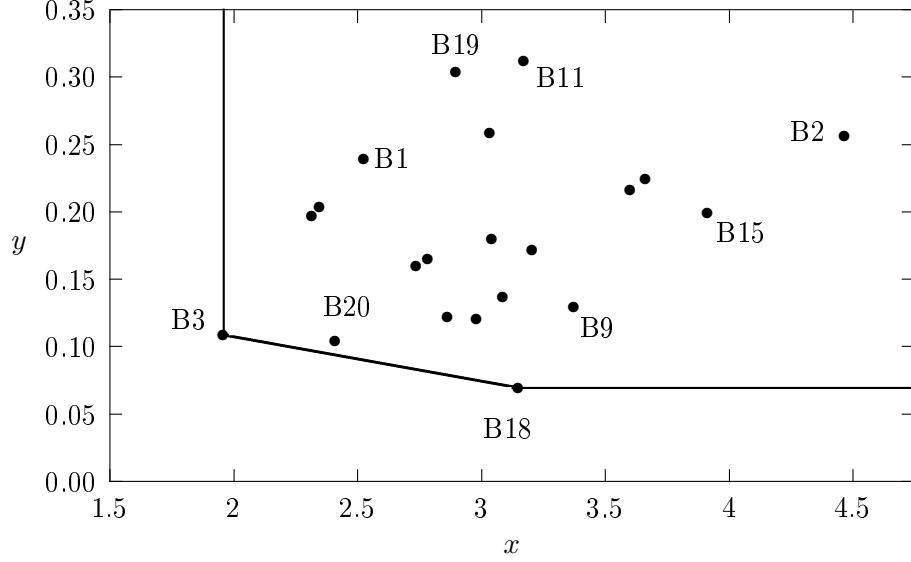
Yıllar itibariyle değişmekle birlikte tam etkin bankaların kontrolü altında bulunan mevduat payının aritmetik ortalaması %23 olarak hesaplanmaktadır. Bu oranın yükselmesi mevduatın doğal olarak güvencesinin göstergesi olduğu gibi, sistemin de etkinliğe doğru gidişinin bir işareti olmaktadır (Bkz. Şekil 9.3).

Çalışma, yıllar itibariyle bankalararası etkinlik farkının ölçek etkinliğindeki büyük farklardan kaynaklandığını ortaya koymuştur. Buna göre, özellikle kamusal sermayeli bankaların ölçek büyüklüğünün etkisizlik kaynağını oluşturduğu açık bir biçimde görülmektedir. Genelde bankaların birkaç istisna dışında, ölçek sorunu yaşadıkları anlaşılmaktadır (Bkz. Tablo 9.8). Oysa teknik değişimin genelde dönem boyunca olumlu geliştiği ve bunun sonucu olarak da toplam faktör verimliliğinde artışların meydana geldiği söylenebilmektedir.

Bu türden araştırmaların AB ile entegrasyonu hedefleyen bir ülke ekonomisi için ne denli önemli olduğu açıktır. Türk Banka sisteminin entegrasyonun gerektirdiği bir yeniden yapılanma sürecine girmesi kaçınılmazdır. Bu nedenle bu çalışmanın kapsamına AB ülkelerinin bankalarından seçilmiş bir grup bankanın da dahil edilmesiyle nisbi etkinlikteki değişim saptanabilir. Böylece hem banka sisteminin hem de tekil bankaların görece etkinliklerini artıracak teknik ve ölçek düzenlemeleri belirlenebilecektir. Bu araştırmada kapsam dışı tutulan mevduat pazar payı %1'in altında olan ticaret bankalarının da kendi aralarında yapılacak bir etkinlik ölçümü ilginç olabilir. Kapsam dışı tutulmuş olan 35 tane küçük ticaret bankasının varlığı, bir yandan oligopolcü yapıdaki ileri yoğunlaşmaya işaret ederken öte yandan araştırmanın banka sisteminin tümünü, bu heterojen yapı nedeniyle, kapsamına alamamasındaki teknik kısıtın varlığını göstermektedir.

9.6 Ek: Meksika ve İtalya Örneği

Bu ekte ilk olarak, Taylor ve diğerleri [129] tarafından Meksika bankaları üzerine yapılan etkinlik ve kârlılık incelemesinde kullanılan girdi ve çıktı faktörleriyle, seçilmiş olan 21 Türk bankasının 1996 yılı için etkinlik değerlendirmesi yapılmıştır. Meksika modelinde kullanılmış olan girdiler, toplam mevduat miktarı ve faiz dışı giderlerdir. Kullanılan iki adet



Şekil 9.5: Meksika Modeli

girdiye karşılık sadece tek bir adet çıktı, faiz ve faiz-dışı gelir toplamı, tanımlanmıştır. Modelde tek çıktı-iki girdi bulunması sebebiyle her bankanın bir birim çıktı üretebilmek için kullanması gereken girdi miktarları bulunarak normalizasyon gerçekleştirilebilir. Böylece etkinlik ölçme problemi, sadece girdi faktörleri olan toplam mevduat miktarı ve faiz dışı giderin ağırlıklarının belirlenmesi problemine indirgenmiş olur. İki değişkenin bulunması problemin grafik üzerinde incelenmesine imkan vermektedir. Seçilen 21 banka için normalize edilmiş veri Şekil 9.5'te verilmiştir. Yatay ekseninde (Toplam Mevduat/Toplam Gelir), düşey ekseninde ise (Faiz Dışı Gider/Toplam Gelir) yer almaktadır. *CCR-DEA* modeli yardımıyla bankaların etkinlik skorları hesaplanmış ve böylece etkin sınıra uzaklıkları nümerik olarak da belirlenmiştir. Ayrıca, ölçeğe göre değişken getiri varsayımı altında etkinlik skorları bulunmuştur. Sonuçlar Tablo 9.16'te ilk iki sütunda verilmiştir.

İkinci olarak, Ferrier ve Hirschberg [74] tarafından İtalyan bankacılık sisteminde etkinlik ölçümüyle ilgili olarak yapılan bir çalışmanın benzeri Türk bankacılık sistemi verileriyle tekrar edilmiştir. İtalya modelinde çıktı faktörleri olarak bankalararası toplam mevduat, toplam net

Kod	Meksika Modeli		İtalya Modeli	
	CCR	BCC	CCR	BCC
B01	0.77	0.95	1.00	1.00
B02	0.44	0.46	0.80	0.81
B03	1.00	1.00	0.84	0.91
B04	0.54	0.55	0.75	0.78
B05	0.70	0.71	1.00	1.00
B06	0.84	0.91	1.00	1.00
B07	0.79	1.00	0.78	0.93
B08	0.71	0.82	0.83	0.85
B09	0.72	0.83	1.00	1.00
B10	0.64	0.87	1.00	1.00
B11	0.62	0.69	1.00	1.00
B12	0.80	0.80	0.96	1.00
B13	0.73	0.92	0.79	0.97
B14	0.83	1.00	1.00	1.00
B15	0.53	0.99	1.00	1.00
B16	0.62	0.69	1.00	1.00
B17	0.64	0.67	1.00	1.00
B18	1.00	1.00	1.00	1.00
B19	0.68	0.68	1.00	1.00
B20	0.94	1.00	0.81	0.83
B21	0.53	0.54	0.82	0.87

Tablo 9.16: Meksika ve İtalya Modeli Sonuçları

kâr, toplam şube sayısı tanımlanırken, girdi faktörleri olarak personel sayısı, ödenmiş sermaye ve toplam mevduat miktarı kullanılmıştır. 21 banka için gerçekleştirilen *CCR-DEA* ve *BCC-DEA* etkinlik analizlerinin sonuçları Tablo 9.16'te son iki sütunda verilmiştir. Görüleceği üzere, Ferrier ve Hirschberg'in girdi-çıktı tanımları Türk bankacılık verisi üzerinde fazla ayırt edici olamamıştır. Bunun arkasında yatan başlıca neden toplam girdi-çıktı sayısının toplam gözlem sayısına oranla oldukça fazla olmasıdır. Ferrier ve Hirschberg'in çalışmasında uygulamanın 94 banka için yapılmış olması, bahsedilen bu sakıncayı ortadan kaldırmıştır.

Bölüm 10

DEA Kritiği ve Eklentiler

Yapılan açıklamalardan anlaşıldığı gibi, DEA üretim ekonomisinin dayandığı temel yapı içinde tutarlılık göstermektedir. Bu yüzden teorik olarak caziptir. Buna ek olarak, yapılan çalışmalar güvenilir sonuçlar verdiğini göstermiştir. Testlerin olumlu olması ve teorik tabanının bulunması DEA'nın tüm uygulamalarda başarılı sonuçlar vereceğinin garantisi değildir. DEA tekniğinin uygulanmasında dikkat edilmesi gereken hususların özetlenmesi faydalı olacaktır. Sherman [123] tarafından özetlendiği şekliyle temel vargular aşağıda verilmiştir

Oluşturulan etkinlik modelinin geçerli ve kullanılan verinin sağlıklı olması halinde DEA tarafından etkinsiz olarak değerlendirilen karar birimlerinin gerçekten görel olarak etkinsiz oldukları söylenebilmektedir. Ayrıca, etkinsiz olarak değerlendirilen karar birimlerinin referans kümelerindeki görel olarak az sayıdaki karar birimine bakarak etkinsizliğin kaynağı hakkında yorum yapılabilmektedir. Ancak, DEA'nın tüm etkinsiz karar birimlerini belirleyebileceğini söylemek yanıltıcı olur. Analiz sadece incelemeye alınan karar birimlerinin oluşturduğu gözlem seti için gerçekleştirildiğinden dolayı mühendislik ve temel bilimlerde hesaplanabildiği şekliyle mutlak etkinlik değil görel etkinlik değerlendirmesi yapmaktadır. Dolayısıyla, belirli bir ölçekte daha fazla üretim yapan yeni bir karar birimi gözlenene kadar en fazla üretim yapan karar birimi teknik etkin olarak değerlendirilecektir. Tabii ki bu yaklaşım mutlak etkinliği güvence altına almamaktadır. Bu bağlamda Pareto etkinlik ve DEA etkinliği arasında fark olduğu konusunda yazında incelemeler bulunmaktadır. Bununla ilgili olarak Ganley ve Cubbin [79] incelenebilir.

Girdi ve çıktı faktörlerinin seçilmesinde izlenecek bir metodolojinin bulunmamasına rağmen dikkat edilmesi gereken bazı temel noktalar vardır. Bunların başında çeşitli endekslerin faktör olarak tanımlanmaları halinde elde edilecek sonuçların güvenilir olamayacağıdır. Bununla ilgili olarak Sherman [122] incelenebilir.

DEA tekniği ile elde edilen sonuçların sadece ilgili üretim sürecine ait etkinlik skorları olduğu unutulmamalıdır. Bu skorların bir performans göstergesi olmasına karşın mutlak başarı sıralaması anlamına gelmediği hatırlanmalıdır. Ayrıca, bulunan skorların, amaçlara ulaşma derecesini gösteren *etkililik* (effectiveness) skoru olarak kabul edilmesi de yanıltıcıdır.

Etkinlik analizinin bütünü dikkate alındığında etkinsiz olarak değerlendirilen karar birimleri için skorlarının güvenilirliğini belirleyen birçok unsur bulunmaktadır. Etkinsizlik sebebi olarak bazı girdi veya çıktı faktörlerinin modele dahil edilmemiş olmaları, homojen olmayan karar birimlerinin birlikte değerlendirilmeleri, yönetici tarafından kontrol edilemeyen faktörlerin bulunması ve bunların matematiksel modelde gerektiği şekilde ifade edilmemiş olması sayılabilir. Etkililiğin sağlanması pahasına etkinsizliğe katlanılmış olabileceği de dikkate alınmalıdır.

DEA tekniği teknik ve ölçek etkinlik skorları ölçümü yaparken tahsis etkinliğini dikkate almamaktadır. Birinin toplam etkinliği diğerinin ise tahsis etkinliği görelisi olarak daha yüksek olan iki hipotetik karar birimi ele alındığında, piyasa koşullarında bunlardan ikincisinin daha tercih edilir durumda olduğu görülse de sadece teknik ve ölçek etkinlik skorlarına bağlı olarak değerlendirme gücü olan DEA'nın sıralaması toplam etkinlik skorlarına bağlı olacaktır. Fiyat verisinin bilindiği hallerde DEA sonuçlarının yorumlanması sırasında tahsis etkinliğinin göz önüne alınmaması yanıltıcı olabilmektedir. Bu hususla ilgili olarak Sexton, Silkman ve Hogan [120] incelenebilir.

DEA tekniğiyle elde edilen sonuçların güvenilirliği hakkında yorum yapmak oldukça güçtür. Oluşturulan etkinlik modeline alınan faktör sayısının artırılması sonucunda hesaplanan etkinlik skorlarının yükseleceği beklenir. Benzer bir sonuç regresyon için de geçerlidir. Regresyon modeline eklenen her yeni bağımsız değişkenin modelin öngörü gücünü yükselttiği bilinmektedir. Ancak bu eklenti, R-kare ve F-testi ile ölçülen anlamlılık düzeyinde azalışa sebep olabilmektedir. Regresyon için var olan model ile ilgili değerlendirme yapma imkanı DEA için bulunmamaktadır. Bu

hususla ilgili olarak Sexton, Silkman ve Hogan [120] incelenebilir.

DEA'nın standart uygulamasında faktör ağırlıkları üzerinde pozitif olma koşulu haricinde kısıt bulunmamaktadır. Böylece her karar biriminin en fazla avantaj sağlayacağı ağırlıkları seçmesine izin verilmiştir. Ağırlık seçiminin serbest olması sonucunda karar birimleri tüm zayıf noktalarını ilgili faktörlere düşük ağırlık vererek saklamakta ve görelilik olarak üstün oldukları tek bir faktör bulunması halinde de uygun ağırlığı tahsis ederek etkinliği yakalamaktadır. Levitt and Joyce [92] tarafından belirtildiği üzere bu tekniğin temel sorunlarından bir tanesidir; çünkü, ekstrem karar birimleri tüm faktörlerdeki performanslarına bakılmaksızın etkin olarak sınıflandırılmaktadır ve bu da etkinlik ölçüm analizinin doğasına aykırıdır. Öte yandan Roll, Cook ve Golany [107] tarafından belirtildiği üzere, eğer bir faktör üretim süreci ile ilişkili olduğu düşünülerek modele alındıysa, bu faktöre verilen ağırlığın sıfır veya sıfıra çok yakın bir değer olmaması gerekmektedir. Ayrıca yine Roll, Cook ve Golany tarafından ifade edildiği gibi, modelde yer alan tek bir faktör için verilen ağırlıkların karar birimlerine bağlı olarak büyük farklılıklar göstermemesi gerekmektedir. Bu sakıncaları ortadan kaldırmaya yönelik olarak ağırlıklar üzerine kısıtlar getirilmelidir. Konuyla ilgili temel referanslar aşağıda verilmiştir.

Kuşkusuz DEA alanında yapılan çalışmaların tamamına yer vermek mümkün değildir. Ancak temel çalışmalar incelenebilmiş ve konuya giriş niteliğinde bir metin oluşturulmuştur. DEA tekniği konusunda daha ileri düzeyde incelemede bulunmak isteyen okuyucular için faydalı olabilecek bir referans listesi aşağıda verilmiştir. Bu referans listesinde yer alan çalışmalar esas olarak

- girdi ve çıktı faktör ağırlıklarının sınırlandırılması: Thompson, Langemeier, Larry, Lee, Lee ve Thrall [132], Thompson, Dharmapala, Rothenberg ve Thrall [], Dyson ve Thanassoulis [57], Golany [82], Roll, Cook ve Golany [106], Cook, Roll ve Kazakov [54], Beasley [21], Wong ve Beasley [137], Yolalan [138], Al, Cook ve Seiford [5], Oral, Kettani ve Lang [99], Cook, Kress ve Seiford [53], Chaparro, Jimenez ve Smith [32], Charnes, Cooper ve Huang [37], Thompson, Singleton, Thrall ve Smith [133], Roll ve Golany [108],
- *toplamsal* (additive) ve *çarpımsal* (multiplicative) DEA modelleri: Banker, Charnes, Cooper ve Schinnar [7], Charnes, Cooper, Seiford ve Stutz [43], [44], Banker ve Maindiratta [15], Ahn, Charnes ve Cooper [3], Sueyoshi ve Chang [126],

- DEA'ya stokastik unsurların eklenmesi: Sengupta [115], [113], [116], [118], [117], Banker, Gadh ve Gorr [14], Charnes, Haag, Jaska ve Semple [47],
- azalan oranlar (congestion) kavramının dikkate alınması: Fare ve Lovell [71], Byrnes, Fare ve Grosskopf [29], Fare, Grosskopf ve Lovell [64] [65], Byrnes, Fare, Grosskopf ve Lovell [30], Fare, Grosskopf, Lovell ve Pasurka [66],
- duyarlılık analizleri: Charnes, Rousseau ve Semple [51], Charnes ve Neralic [48], [49], [50], [38], Thompson, Dharmapala ve Thrall [131],
- pencere analizleri: Sueyoshi [125], Klopp [88], Eechambadi [58], Fare [60], Bowlin [27], Charnes, Clark, Cooper ve Golany [33],
- konveks olmayan üretim imkanları kümeleri: Peterson [102],
- amaç programlama tabanlı DEA: Golany [81]

gibi çeşitli alanlardaki katkıları içermektedir.

Kaynakça

- [1] S. Abaç. *Türkiye’de Bankalar ve Bankacılık Sistemi*. İBAR Yayınları, İstanbul, 1986.
- [2] S. Afriat. Efficiency estimation of production functions. *International Economic Review*, 13:568–598, 1972.
- [3] T. Ahn, A. Charnes, and W. W. Cooper. Statistical and DEA evaluations of relative efficiencies of public and private institutions of higher learning. *Socio-Economic Planning Sciences*, 22:259–269, 1988.
- [4] D. J. Aigner and S. F. Chu. On estimating the industry production function. *American Economic Review*, 58:826–839, 1968.
- [5] A. I. Ali, W. D. Cook, and L. M. Seiford. Strict versus weak ordinal relations for multipliers in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 37:733–738, 1991.
- [6] R. Banker. Estimating most productive scale size using Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, 17:35–44, 1984.
- [7] R. Banker, A. Charnes, W. W. Cooper, and A. Schinnar. A bi-extremal principle for frontier estimation and efficiency evaluation. *Management Science*, 30:1370–1382, 1981.
- [8] R. Banker, R. F. Conrad, and R. P. Strauss. A comparative application of DEA and translog methods: An illustrative study of hospital production. *Management Science*, 32:30–44, 1986.

- [9] R. D. Banker. Returns to scale, scale efficiency and average cost minimization in multi-output production. Technical report, Carnegie Mellon University, 1986.
- [10] R. D. Banker, I. Bardhan, and W. W. Cooper. A note on returns to scale in DEA. *European Journal of Operational Research*, 88:583–585, 1996.
- [11] R. D. Banker, H. Chang, and W. W. Cooper. Equivalence and implementation of alternative methods for determining returns to scale in Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, 89:473–481, 1996.
- [12] R. D. Banker, A. Charnes, W. W. Cooper, and A. Maindiratta. A comparison of DEA and translog estimates of production frontiers using simulated observations from a known technology. In A. Dođramacı and R. Fare, editors, *Applications of Modern Production Theory: Efficiency and Productivity*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1988.
- [13] R. D. Banker, A. Charnes, and W.W. Cooper. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 30:1078–1092, 1984.
- [14] R. D. Banker, V. Gadh, and W. L. Gorr. A Monte Carlo comparison of two production frontier estimation methods: Corrected ordinary least squares and Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, 67:332–344, 1993.
- [15] R. D. Banker and A. Maindiratta. Piecewise loglinear estimates of efficient production surfaces. *Management Science*, 32:126–135, 1986.
- [16] R. D. Banker and R. C. Morey. Efficiency analysis for exogenously fixed inputs and outputs. *Operations Research*, 34:513–521, 1986.
- [17] R. D. Banker and R. C. Morey. The use of categorical variables in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 32:1613–1627, 1986.
- [18] R. D. Banker and R. M. Thrall. Estimation of returns to scale using Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, 62:74–84, 1992.

- [19] P. W. Bauer. Recent developments in the econometric estimation of frontiers. *Journal of Econometrics*, 46:39–56, 1990.
- [20] M. Bazaraa and J. Jarvis. *Linear Programming and Network Flows*. Wiley, New York, 1990.
- [21] J. E. Beasley. Comparing university departments. *Omega, International Journal of Management Science*, 18:171–183, 1990.
- [22] S. A. Berg, F. R. Forsund, and E. S. Jansen. Technical efficiency of Norwegian banks: The non-parametric approach to efficiency measurement. *Journal of Productivity Analysis*, 2:127–142, 1991.
- [23] A. N. Berger, G. A. Hanweck, and D. B. Humphrey. Competitive viability in banking. *Journal of Monetary Economics*, 20:501–520, 1987.
- [24] A. N. Berger and D. B. Humphrey. Efficiency of financial institutions: International survey and directions for future research. *European Journal of Operational Research*, 98:175–212, 1997.
- [25] A. M. Bessent and E. W. Bessent. Comparing the comparative efficiency of schools through Data Envelopment Analysis. *Educational Administration Quarterly*, 16:57–75, 1980.
- [26] J. N. Boles. Efficiency squared - efficiency computation of efficiency indexes. In *Proceedings of the 39th Annual Meeting of the Western Farm Association*, pages 137–142. 1966.
- [27] W. F. Bowlin. Evaluating the efficiency of US Air Force real property maintenance activities. *Journal of the Operational Research Society*, 38:127–135, 1987.
- [28] W. F. Bowlin, A. Charnes, W. W. Cooper, and H. D. Sherman. Data Envelopment Analysis and regression approaches to efficiency estimation and evaluation. *Annals of Operations Research*, 2:113–138, 1985.
- [29] P. Byrnes, R. Fare, and S. Grosskopf. Measuring productive efficiency: An application to Illinois strip mines. *Management Science*, 30:671–681, 1984.

- [30] P. Byrnes, R. Fare, S. Grosskopf, and C. A. K. Lovell. The effect of unions on productivity: US surface mining of coal. *Management Science*, 34:1037–1053, 1988.
- [31] D. W. Caves, L. R. Christensen, and W. E. Diewert. The economic theory of index numbers and the measurement of input, output and productivity. *Econometrica*, 50:1393–1414, 1982.
- [32] F. P. Chaparro, J. S. Jimenez, and P. Smith. On the role of weight restrictions in Data Envelopment Analysis. *Journal of Productivity Analysis*, 8:215–230, 1997.
- [33] A. Charnes, C. T. Clark, W. W. Cooper, and B. Golany. A developmental study of Data Envelopment Analysis in measuring the efficiency of maintenance units in the US Air Forces. *Annals of Operations Research*, 2:95–112, 1985.
- [34] A. Charnes and W. W. Cooper. *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*. John Wiley, New York, 1961.
- [35] A. Charnes and W. W. Cooper. Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Quarterly*, 9:181–185, 1962.
- [36] A. Charnes and W. W. Cooper. An explicit general solution in linear fractional programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, 20:449–467, 1973.
- [37] A. Charnes, W. W. Cooper, and Z. M. Huang. Cone ratio Data Envelopment Analysis and multiobjective programming. *International Journal of Systems Sciences*, 20:1099–1118, 1989.
- [38] A. Charnes, W. W. Cooper, and Z. M. Huang. Polyhedral cone-ratio DEA models with an illustrative application to large commercial banks. *Journal of Econometric*, 46:73–91, 1990.
- [39] A. Charnes, W. W. Cooper, A. Y. Lewin, and L. M. Seiford. *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1995.
- [40] A. Charnes, W. W. Cooper, and E. Rhodes. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2:429–444, 1978.

- [41] A. Charnes, W. W. Cooper, and E. Rhodes. Short communication: Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 3:339, 1979.
- [42] A. Charnes, W. W. Cooper, and E. Rhodes. Evaluating program and managerial efficiency: An application of Data Envelopment Analysis to program follow through. *Management Science*, 27:668–697, 1981.
- [43] A. Charnes, W. W. Cooper, L. Seiford, and J. Stutz. Multiplicative model for efficiency analysis. *Socio-Economic Planning Sciences*, 16:223–224, 1982.
- [44] A. Charnes, W. W. Cooper, L. Seiford, and J. Stutz. Invariant multiplicative efficiency and piecewise Cobb-Douglas envelopments. *Operations Research Letters*, 2:101–103, 1983.
- [45] A. Charnes, W. W. Cooper, and R. M. Thrall. Classifying and characterizing efficiencies and inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Operations Research Letters*, 5:105–110, 1986.
- [46] A. Charnes, W. W. Cooper, and R. M. Thrall. A structure for classifying and characterizing efficiencies in Data Envelopment Analysis. *Journal of Productivity Analysis*, 2:197–237, 1991.
- [47] A. Charnes, S. Haag, P. Jaska, and J. Semple. Sensitivity of efficiency classifications in the additive model of Data Envelopment Analysis. *International Journal of Systems Science*, 23:789–798, 1992.
- [48] A. Charnes and L. Neralic. Sensitivity analysis in Data Envelopment Analysis- Part I. *Glasnik Matematički Serija III*, 24:211–226, 1989.
- [49] A. Charnes and L. Neralic. Sensitivity analysis in Data Envelopment Analysis- Part II. *Glasnik Matematički Serija III*, 24:449–463, 1989.
- [50] A. Charnes and L. Neralic. Sensitivity analysis in Data Envelopment Analysis- Part III. *Glasnik Matematički Serija III*, 27:191–201, 1992.

- [51] A. Charnes, J. J. Rousseau, and J. H. Semple. Sensitivity and stability of efficiency classifications in Data Envelopment Analysis. *Journal of Productivity Analysis*, 7:5–18, 1996.
- [52] T. Coelli, D. S. P. Rao, and G. E. Battese. *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1998.
- [53] W. Cook, M. Kress, and L. M. Seiford. Prioritization models for frontier decision making units in DEA. *European Journal of Operational Research*, 59:319–323, 1992.
- [54] W. Cook, Y. Roll, and A. Kazakov. Measurement of the relative efficiency of highway maintenance patrols in Ontario. In *Canadian Operations Research Society Conference, Montreal*, 1988.
- [55] G. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [56] W. Diewert and C. Parkan. Linear programming tests of regularity conditions for production functions. In W. Eichhorn, R. Henn, K. Neuman, and R. Shephard, editors, *Quantitative Studies on Production and Prices*. Physica-Verlag, Vienna, 1983.
- [57] R. G. Dyson and E. Thanassoulis. Reducing weight flexibility in Data Envelopment Analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 39:563–576, 1988.
- [58] N. V. Eechambadi. *Efficiency Analysis of Market Response and the Mix: Extending Data Envelopment Analysis to a Competitive Environment*. PhD thesis, The University of Texas at Austin, 1985.
- [59] E. Elyasiani and S. Mehdian. Efficiency in the commercial banking industry: A production frontier approach. *Applied Economics*, 22:539–551, 1990.
- [60] R. Fare. A dynamic non-parametric measure of output efficiency. *Operations Research Letters*, 5:83–85, 1986.
- [61] R. Fare and S. Grosskopf. Measuring congestion in production. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 43:257–271, 1983.

- [62] R. Fare and S. Grosskopf. A nonparametric approach to scale efficiency. *Scandinavian Journal of Economics*, 87:594–604, 1985.
- [63] R. Fare and S. Grosskopf. *Cost and Revenue Constrained Production*. Bilkent University Lecture Series Vol.4, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [64] R. Fare, S. Grosskopf, and C. Lovell. *The Measurement of Efficiency of Production*. Kluwer-Nijhoff, Boston, 1985.
- [65] R. Fare, S. Grosskopf, and C. Lovell. *Production Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [66] R. Fare, S. Grosskopf, C. A. K. Lovell, and C. Pasurka. Multilateral productivity comparisons when some outputs are undesirable: A nonparametric approach. *Review of Economics and Statistics*, 71:90–98, 1989.
- [67] R. Fare, S. Grosskopf, M. Norris, and Z. Zhang. Productivity growth, technical progress, and efficiency changes in industrialised countries. *American Economic Review*, 84:66–83, 1994.
- [68] R. Fare, S. Grosskopf, and P. Roos. Malmquist productivity indexes: A survey of theory and practice. In R. Fare, S. Grosskopf, and R. R. Russell, editors, *Index Numbers: Essays in Honour of Sten Malmquist*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997.
- [69] R. Fare, S. Grosskopf, and W. Weber. The effect of risk-based capital requirements on profit efficiency in banking. Discussion Paper Series No:97-12, Department of Economics, Southern Illinois University at Carbondale, 1997.
- [70] R. Fare and W. Hunsaker. Notions of efficiency and their reference sets. *Management Science*, 32:237–243, 1986.
- [71] R. Fare and C. A. K. Lovell. Measuring the technical efficiency of production. *Journal of Economic Theory*, 19:150–162, 1978.
- [72] M. Farrell and M. Fieldhouse. Estimating efficient production functions under increasing returns to scale. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 2:252–267, 1962.

- [73] M. J. Farrell. The measurement of productivity efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*, 120:253–290, 1957.
- [74] G. D. Ferrier and J. G. Hirschberg. Bootstrapping confidence intervals for LP efficiency scores: With an illustration using Italian banking data. *Journal of Productivity Analysis*, 8:19–33, 1997.
- [75] G. D. Ferrier and C. A. K. Lovell. Measuring cost efficiency in banking: Econometric and linear programming evidence. *Journal of Econometrics*, 46:229–245, 1990.
- [76] F. R. Forsund, C. A. K. Lovell, and P. Schmidt. A survey of frontier production functions and of their relationship to efficiency measurement. *Journal of Econometrics*, 13:5–25, 1980.
- [77] H. O. Fried, C. A. K. Lovell, and S. S. Schmidt. *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*. Oxford University Press, New York, 1993.
- [78] H. O. Fried, S. S. Schmidt, and S. Yaisawarng. Incorporating the operating environment into a measure of technical efficiency. Working paper, Union College, Schenectady, 1995.
- [79] J. A. Ganley and J. S. Cubbin. *Public Sector Efficiency Measurement*. Elsevier Science Publisher, Amsterdam, 1992.
- [80] S. Gass. *Linear Programming: Methods and Applications*. McGraw-Hill, New York, 1985.
- [81] B. Golany. An interactive MOLP procedure for the extension of DEA to effectiveness analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 39:725–734, 1988.
- [82] B. Golany. A note on including ordinal relations among multipliers in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 34:237–250, 1988.
- [83] B. Golany and Y. Roll. Some extensions of techniques to handle non-discretionary factors in Data Envelopment Analysis. *Journal of Productivity Analysis*, 4:419–432, 1993.
- [84] S. Grosskopf. The role of the reference technology in measuring productive efficiency. *Economic Journal*, 96:499–513, 1986.

- [85] S. Grosskopf. Efficiency and productivity. In H. O. Fried, C. A. K. Lovell, and S. S. Schmidt, editors, *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*, pages 160–194. Oxford University Press, New York, 1993.
- [86] D. B. Humphrey. Costs and scale economies in bank intermediation. In R. C. Aspinwall and R. Eisenbeis, editors, *Handbook of Banking Strategy*, pages 745–783. John Wiley, New York, 1985.
- [87] W. A. Kamakura. A note on -the use of categorical variables in Data Envelopment Analysis-. *Management Science*, 34:1273–1276, 1988.
- [88] G. A. Klopp. *The Analysis of the Efficiency of Productive Systems with Multiple Inputs and Outputs*. PhD thesis, University of Illinois at Chicago, 1985.
- [89] T. C. Koopmans. *Activity Analysis of Production and Allocation*. John Wiley and Sons Inc., New York, 1951.
- [90] T. C. Koopmans. *Three Essays on the State of Economic Science*. McGraw Hill, New York, 1957.
- [91] K. Lancaster. *Mathematical Economics*. MacMillan, New York, 1968.
- [92] M. S. Levitt and M. A. S. Joyce. *The Growth and Efficiency of Public Spending*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [93] C. A. L. Lovell and P. Schmidt. A comparison of alternative approaches to the measurement of productive efficiency. In A. Dođramacı and R. Fare, editors, *Applications of Modern Production Theory: Efficiency and Productivity*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1988.
- [94] D. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1984.
- [95] T. A. McCarty and S. Yaisawarng. Technical efficiency in New Jersey school district. In H. O. Fried, C. A. K. Lovell, and S. S. Schmidt, editors, *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*. Oxford University Press, New York, 1993.

- [96] P. C. McLaughlin and S. Coffey. Measuring productivity in services. *International Journal of Service Industry Management*, 1:46–64, 1990.
- [97] M. Nishimizu and J. M. Page. Total factor productivity growth, technical progress and technical efficiency change: Dimensions of productivity change in Yugoslavia. *Economic Journal*, 92:920–936, 1982.
- [98] M. Norman and B. Stoker. *Data Envelopment Analysis*. John Wiley, Chichester, 1991.
- [99] M. Oral, O. Kettani, and P. Lang. A methodology for collective evaluation and selection of industrial research and development projects. *Management Science*, 37:871–885, 1991.
- [100] J. C. Panzar and R. D. Willig. Economies of scale in multi-output production. *Quarterly Journal of Economics*, Aug:481–493, 1977.
- [101] Ç. Parkan. Measuring the performance of hotel operations. *Socio-Economic Planning Sciences*, 30:257–292, 1996.
- [102] N. C. Peterson. Data Envelopment Analysis on a relaxed set of assumptions. *Management Science*, 36:305–314, 1990.
- [103] N. Rangan, R. Grabowski, H. Y. Aly, and C. Pasurka. The technical efficiency of US banks. *Economics Letters*, 28:169–175, 1988.
- [104] S. C. Ray. Data Envelopment Analysis, nondiscretionary inputs and efficiency: An alternative interpretation. *Socio-Economic Planning Sciences*, 22:167–176, 1988.
- [105] S. C. Ray. Resource-use efficiency in public schools: A study of Connecticut data. *Management Science*, 37:1620–1628, 1991.
- [106] Y. Roll, W. D. Cook, and B. Golany. Factor weights in Data Envelopment Analysis. In *Canadian Operations Research Society Conference, Montreal*, 1988.
- [107] Y. Roll, W. D. Cook, and B. Golany. Controlling factor weights in Data Envelopment Analysis. *IIE Transactions*, 23:2–9, 1991.

- [108] Y. Roll and B. Golany. Alternate methods of treating factor weights in DEA. *Omega, International Journal of Management Science*, 21:99–109, 1993.
- [109] J. Ruggiero. Non-discretionary inputs in Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, 11:461–469, 1998.
- [110] L. M. Seiford. Data Envelopment Analysis: The evolution of the state of the art (1978-1995). *Journal of Productivity Analysis*, 7:99–138, 1996.
- [111] L. M. Seiford and R. M. Thrall. Recent developments in Dea: The mathematical programming approach to frontier analysis. *Journal of Econometrics*, 46:7–38, 1990.
- [112] L. M. Seiford and J. Zhu. An investigation of returns to scale in Data Envelopment Analysis. *Omega-International Journal of Management Science*, 27:1–11, 1999.
- [113] J. K. Sengupta. Data Envelopment Analysis for efficiency measurement in stochastic case. *Computers and Operations Research*, 14:117–129, 1987.
- [114] J. K. Sengupta. Efficiency measurement in non-market systems through Data Envelopment Analysis. *International Journal of Systems Science*, 18:2279–2304, 1987.
- [115] J. K. Sengupta. Production frontier estimation to measure efficiency: A critical evaluation in light of Data Envelopment Analysis. *Managerial and Decision Economics*, 8:93–99, 1987.
- [116] J. K. Sengupta. Efficiency comparisons in input-output systems. *International Journal of Systems Science*, 19:1085–1094, 1988.
- [117] J. K. Sengupta. Testing Farrell efficiency by stochastic dominance. *Economic Notes*, 3:429–440, 1990.
- [118] J. K. Sengupta. Transformations in stochastic DEA models. *Journal of Econometrics*, 46:109–123, 1990.
- [119] T. R. Sexton. The methodology of Data Envelopment Analysis. In R. H. Silkman, editor, *Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis*. Jossey-Bass Inc., San Francisco, 1986.

- [120] T. R. Sexton, R. H. Silkman, and A. J. Hogan. Data Envelopment Analysis: Critique and extensions. In R. H. Silkman, editor, *Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis*. Jossey-Bass Inc., San Francisco, 1986.
- [121] R. W. Shephard. *The Theory of Cost and Production Functions*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [122] H. D. Sherman. *Measurement of Hospital Technical Efficiency: A Comparative Evaluation of Data Envelopment Analysis and Locating Inefficiency in Health Care Organizations*. PhD thesis, Harvard Graduate School of Business Administration, 1981.
- [123] H. D. Sherman. Data Envelopment Analysis as a new managerial audit methodology- test and evaluation. *Auditing: A Journal of Practice and Theory*, 4:35–53, 1984.
- [124] H. D. Sherman. Improving the productivity of service businesses. *Sloan Management Review*, 25:11–23, 1984.
- [125] T. Sueyoshi. Production analysis in different time periods: An application of Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, 86:216–230, 1995.
- [126] T. Sueyoshi and Y. L. Chang. Efficient algorithm for additive and multiplicative models in Data Envelopment Analysis. *Operations Research Letters*, 8:205–213, 1989.
- [127] E. G. Tatje and C. A. K. Lovell. A note on the Malmquist productivity index. *Economic Letters*, 47:169–175, 1995.
- [128] E. G. Tatje and C. A. K. Lovell. The sources of productivity change in Spanish banking. *European Journal of Operational Research*, 98:364–380, 1997.
- [129] W. M. Taylor, R. G. Thompson, R. M. Thrall, and P. S. Dharmapala. DEA/AR efficiency and profitability of Mexican banks: A total income model. *European Journal of Operational Research*, 98:346–363, 1997.
- [130] R. G. Thompson, P. S. Dharmapala, D. B. Humphrey, W. M. Taylor, and R. M. Thrall. Computing DEA/AR efficiency and profit

- ratio measures with an illustrative bank application. *Annals of Operations Research*, 68:303–327, 1996.
- [131] R. G. Thompson, P. S. Dharmapala, and R. M. Thrall. Sensitivity analysis of efficiency measures with applications to Kansas farming and Illinois coal mining. In A. Y. Lewin L. M. Seiford A. Charnes, W. W. Cooper, editor, *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1994.
- [132] R. G. Thompson, L. N. Langemeier, N. Larry, C. T. Lee, E. Lee, and R. M. Thrall. The role of multiplier bounds in efficiency analysis with application to Kansas farming. *Journal of Econometrics*, 46:93–108, 1990.
- [133] R. G. Thompson, F. D. Singleton, R. M. Thrall, and B. A. Smith. Comparative site evaluations for locating high energy physics lab in Texas. *Interfaces*, 16:35–49, 1986.
- [134] R. M. Thrall. Overview and recent developments in DEA: The mathematical programming approach. Working Paper No:66, Rice University, 1988.
- [135] K. Tone. A simple characterization of returns to scale in DEA. *Journal of the Operational Research Society of Japan*, 39:604–613, 1996.
- [136] M. Vassiloglou and D. Giokas. A study of the relative efficiency of bank branches: An application of Data Envelopment Analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 41:591–597, 1990.
- [137] Y. H. Wong and J. E. Beasley. Restricted weight flexibility in Data Envelopment Analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 41:829–835, 1990.
- [138] R. Yolalan. *Efficiency Measurement and Data Envelopment Analysis*. PhD thesis, Universite Laval, Quebec, Kanada, 1993.
- [139] R. Yolalan. *İşletmelerarası Görelî Etkinlik Ölçümü*. Milli Prodük-tivite Merkezi, Ankara, 1993.

- [140] O. Zaim. The effect of financial liberalization on the efficiency of Turkish commercial banks. *Applied Financial Economics*, 5:257–264, 1995.
- [141] J. Zhu and H. A. Shen. A discussion of testing DMUs' returns to scale. *European Journal of Operational Research*, 81:590–596, 1995.
- [142] K. Zieschang. Measuring efficiency in DEA models. Technical report, Bureau of Labor Statistics, Washington, D.C., 1983.

Dizin

- Arşimedgil olmayan büyüklük, 26,
52, 53, 82
Aylak değişken, 57
Azalan oranlar, 206
- BCC modeli, 95
- CCR modeli, 50, 61–64, 85, 88,
99
CRS, 10
- Çarpan modeli, 62, 69
Çarpımsal DEA modeli, 205
Çıktıya yönelik etkinlik, 18, 21,
26, 33, 55, 62–64
- DEA etkinliği, 96, 185
Değiştirilmiş problem, 59
Dışsal değişken, 135–149
DMU, 6
DRS, 17, 36
Düal model, 64
- Ekonomik etkinlik, 133, 134
Ekstrem ölçek büyüklüğü, 119
En küçük kareler yöntemi, 46, 47
En verimli ölçek büyüklüğü, 11,
16, 17, 20, 34, 85, 96–
103
Eş-hasilat doğrusu, 33, 42
Eş-maliyet doğrusu, 27
Eş-ürün eğrisi, 22–27
- Etkililik, 204
Etkin sınır, 14, 22–27, 33
Etkin üretim fonksiyonu, 5, 14
Etkinlik, 11
Etkinlik değişimi, 152, 189
Etkinsizlik postulatı, 86
- Farrell etkinlik ölçümü, 11, 18–
21, 25, 40, 43
Fiyat etkinliği, 27, 33, 131
- Girdiye yönelik etkinlik, 18, 20,
26, 33, 51, 52, 54, 61–62,
69
- IRS, 17, 36
- İktisadi etkinlik, 31, 42
- Karar birimi, 6
Karışık tamsayı programlama, 138
Kategorik değişken, 138, 147–149
Kesirli programlama, 48, 51
Kısmi verimlilik, 12
Konveks küme, 7, 22
Konvekslik postulatı, 86, 147
- Lindo, 71, 74
- Malmquist TFP endeksi, 151–156,
189
Marjinal teknik ikame oranı, 22

- Minimum ekstrapolasyon postu-
latı, 86
- MPSS, 11, 16, 19, 85
- NDRS, 112
- NIRS, 112
- Optimum faktör bileşimi, 27, 29
- Ölçeğe göre artan getiri, 17, 33,
36, 94, 97, 101, 119, 123
- Ölçeğe göre artmayan getiri, 111
- Ölçeğe göre azalan getiri, 17, 33,
36, 94, 97, 101, 119, 123
- Ölçeğe göre azalmayan getiri, 111
- Ölçeğe göre değişken getiri, 18,
19, 21, 33, 34
- Ölçeğe göre getiri, 118
- Ölçeğe göre sabit getiri, 10, 20,
24, 33, 34, 61, 62, 69, 94,
119, 123
- Ölçeğe göre sabit getiri postulatı,
86
- Ölçek esnekliği, 119
- Ölçek etkinliği, 16–18, 20, 21, 30,
33, 185
- Ölçek etkinliği endeksi metodu,
114
- Parametrik olmayan, 45
- Parçalı doğrusal, 22
- Pareto-Koopmans etkinliği, 58
- Prodüktivite, 11
- Radyal uzaklık, 25, 49
- Referans kümesi, 64–69
- Referans teknoloji, 10
- Regresyon, 46, 136
- Russell etkinliği, 21
- Saf teknik etkinlik, 14
- Sanal çıktı, 13, 49, 68
- Sanal girdi, 13, 49, 68
- Shephard uzaklık fonksiyonu, 85–
88
- Simplex algoritması, 48, 54
- Tahsis etkinliği, 27–33, 131, 134
- Teknik değişme, 15–189
- Teknik etkinlik, 14–18, 20, 21, 30,
33, 88–96, 185
- Teknik ilerleme, 15
- Teknoloji, 14, 20
- TFP, 51
- Tobit regresyon modeli, 136
- Toplam çıktı, 49
- Toplam etkinlik, 20, 21, 24, 185
- Toplam faktör üretkenliği, 13
- Toplam faktör verimliliği, 13, 49,
61, 62
- Toplam girdi, 49
- Toplamsal DEA modeli, 205
- Törnqvist/Fisher endeksi, 151
- Tümleyici aylaklık teoremi, 66,
68
- Uzaklık fonksiyonu, 152, 189
- Üretim fonksiyonu, 5, 14, 22
- Üretim imkanları kümesi, 6, 8,
14, 85, 88
- Üretim sınırı, 5–11, 14, 20, 24, 34
- Üretkenlik, 11
- Veri zarflama analizi, 23, 45, 49
- Verimlilik, 11–13, 16, 17, 34
- VRS, 18
- Zarflama modeli, 62, 64, 69
- Zayıf etkinlik, 21